भौतिकी – गणितम्

INDIAN MATHEMATICS APPLICATIONS IN PHYSICS

$$67x^2 - 7 = y^2$$

$$\sqrt{67} \cong \overbrace{852(1,0)}$$

डा॰ शक्तिधरः शर्मा

अनन्तश्री-काञ्चीमठ-शंकराचार्य

श्रीचरण-कमलयोः

सप्रश्रयं समर्प्यते

"भौतिकी-गणितम्"

Indian Mathematics Applications in Physics

शक्तिधरः शर्मा

10 - 1 - 1999

Bhautikī Gaṇitam

Indian Mathematics
Applications in Physics

by:

Shaktidhara Sharma
Ph.D. (Nuclear Physics U.S.A.),
Siddhanata Jyotishacharya
M.A. (Sanskrit)
Prof. (Ret.) Department of Physics
Punjabi University Patiala. (Punjab)

Published by :
Dhriti Softwares
Martand Bhawan, Kurali (Ropar), (Punjab) India.

Printed by:
Coronet Advertising,
C-9/62, Sector 8, Rohini,
Delhi 110 085. India.

Title designed by :
Creative Computers,
Phase VII, Mohali

Price	**: Rs. 200/- (India)**
Abroad	**: $ 10**

विषयः	पृष्ठसंख्या

आमुखम्

एतत् पुस्तकं "भौतिकी-गणितम्" संस्कृतभाषायां प्रकाशयतो मम मनः नितरां प्रसीदति। संस्कृतभाषायां वैज्ञानिकं विषयवस्तु कुतो लिखामि? इति न जाने। केवलम् अन्तःप्रेरणयैव तत्र कारणम्। संस्कृतं वैज्ञानिकैः विषयैरपि समृध्नुयादिति मेऽभिलाषः। अध्यापन-कक्षासु यत् किञ्चिदपि भौतिकी-विज्ञान-गणित-विषयवस्तु अध्यापितम् तत्सर्वं पूर्वं संस्कृत भाषायाम् उपन्यबध्नाम्-तदनन्तरम् इंग्लिशभाषायां विलिख्य कक्षासु उपास्थापयम्। "यदि मम छात्राः संस्कृतज्ञाः अभविष्यन्, तदा तान् सर्वान् एतान् वैज्ञानिकान् विषयान् संस्कृत भाषायामेव अध्यापयिष्यम्" इति मे प्रतिज्ञाऽवर्तत। काञ्चीमठपीठाधीशाः श्री शंकर-सन्निधिं प्राप्ताः अनन्तश्री परमाचार्य-श्री-चरणाः एतां प्रवृत्तिम् आशीराशिभिः समार्थयन्। परम्-सदैव आगृह्णन् यत् अनुसन्धान-लब्धं विषयवस्तु पूर्वम् इंग्लिश भाषायां प्रकाशनीयम् तदनन्तरं संस्कृत भाषायाम् उपनिबद्धव्यम् इति।

किञ्च प्राचीन-कालिकानां गणित-विज्ञान-परम्पराणां विकासम् उपेक्ष्य इतिहास-मात्रा-ध्ययनं नैव रोचते विद्वद्भ्यः वैज्ञानिकेभ्यः। प्राचीनाः उपलब्धीः विशकलय्य प्रगमय्य च विज्ञान क्षेत्रेषु प्रयोगाः एव प्रशस्याः स्युः। अत एव लेखकः सदैव भारतीयं गणित विज्ञान-विषयवस्तु विकास्यैव अध्ययन कक्षासु प्रायुंक्त।

वस्तुतस्तु 1975 तमे ख्रीस्ताब्दे एव अस्य प्रकाशनार्थं प्रायतिषि, परं वैज्ञानिक-गणितीय-संकेतैः संवलितं विषय वस्तु,

तदपि संस्कृत -देवनागरी लिप्याम्, प्रकाशयितुं मुद्रकः प्रायतत परम्-असामर्थ्यम् अन्वभूत्। केवलं कुट्टक-वर्गप्रकृत्योः विवेचनमेव यथाकथञ्चन मुद्रितम्। केन्द्रीयशिक्षा मन्त्रालयेन मम पुस्तकत्रयस्य कृते प्रकाशनोत्तरम् 80% व्ययानुदानं स्वीकृतमासीत्। मया मुद्रकाय पञ्चसहस्रं रूप्यकाणां दत्तम्। पूर्ण-प्रकाशने असाफल्यात् धनहानिः मे अजायत।

खीस्ताब्दे 1993-1994तमे बैंगलूरस्थ भारतीय-विज्ञान-संस्थाने (I.I.SC.) फिजिक्स विभागस्य, तत्सम्बद्ध-सिद्वान्ताध्ययन-केन्द्रस्य च (C.T.S) अध्यक्षैः डा॰ T.V. रामकृष्णम् महोदयैः तथा च डा॰ N. कुमार महोदयैः (अधुना रमन-शोधसंस्थानस्य निर्देशकैः।) लेखकः प्रवीक्षक-प्रोफैसर-पदे आमन्त्रितः। तत्र सर्वं भारतीय-गणितसम्बन्धि विषय वस्तु संकलय्य इंग्लिश भाषायाम् पुस्तकम् "Indian Mathematics Advancments & Applications" लिखितुं समयो मे दत्तः। तदा संस्कृत-भाषायां भौतिकी गणितं संवर्धितं परिष्कृतं, तथा च इंग्लिश भाषायां तु अधिकं विषयवस्तु प्रतिपादयत् उपरिलिखितं पुस्तकं च प्रास्तौम्। अधुना प्रकाश्येते उभौ एतौ ग्रन्थौ। डा॰ T.V. रामकृष्णम् तथा च डा॰ N. कुमारम् इत्युभौ प्रेरणायै धन्यौ वदामि।

एतस्मिन् पुस्तके अध्याय चतुष्टयं वर्तते। प्रथमे अध्याये कुट्टक-सिद्धान्तान् प्रतिपाद्य तेषां भौतिकीशास्त्रे प्रयोगाश्च निदर्शिताः। द्वितीयस्मिन् अध्याये वर्गप्रकृति-सिद्वान्तानां विवेचनम् तथा च नाभिक भौतिकी शास्त्रे प्रयोगाः प्रस्तुताः। तृतीयस्मिन् अध्याये छन्दः शास्त्रस्य प्रस्तार सिद्वान्ताः तथा च तेषां

भौतिकीशास्त्र-समस्यासु प्रयोगाः निदर्शिताः। चतुर्थे अध्याये तथा च परिशिष्टे वैज्ञानिक-धारणानां भारतीय-दर्शनैः सह तुलनात्मकं विवेचनम् उपस्थापितम्।

प्रथमे अध्याये मौलिक रूपेण वल्ली परिभाषिता। तस्याः व्यापकाः प्राचीनाः प्रयोगाः तथा च नवीन-वैज्ञानिक-क्षेत्रेषु प्रयोगाः सोदाहरणं प्रदर्शिताः। भौतिकी शास्त्रस्य विजनिततादि समस्याः तथा च साधारणाः अन्तर-समीकरणादि समस्याः व्यविच्यन्त। द्वितीयस्मिन् अध्याये ब्रह्मगुप्तस्य वज्राभ्याससूत्रस्य व्यापकं रूपम् उपस्थापितम्। वर्गप्रकृति-वितत-भिन्न-वल्ल्याः विस्तृतं मौलिकं विवेचनं प्रत्यपाद्यत। नाभिक-भौतिकीशास्त्रे क्वान्तमांक-निरोध-सिद्धान्तम् उपस्थाप्य अस्य प्रयोगाः निदर्शिताः। नाभिकस्य चुम्बकीय-वैद्युतिक-द्वित्रिचतुर्घूर्णानां, नियमितितायाः (systematics) अध्ययने वर्गप्रकृति-सिद्धान्त प्रयोगैः नवाः परिणामाः लब्धाः। एते अन्यत्र क्वचनापि नैव लभ्यन्ते।

तृतीयाध्याये च वर्णिक-मात्रिकच्छन्दसां सिद्धान्ताः विशकलिताः। मात्राच्छन्दसां सिद्धान्ताः मौलिक-विधया कुट्टकाश्रित-विधिना प्रतिपादिताः। आर्याच्छन्दसः कति भेदाः सम्भविनः? इति दुरूहेन गणितेन समस्या समाधीयत। प्रस्तार-प्रत्ययषट्कस्य प्रयोगैः भौतिकी शास्त्रेऽपि इलैक्ट्रान प्रोटोन-न्युट्रोन संघानाम् अवस्थाः ज्ञातुं शक्याः इत्यपि प्रतिपादितम्।

चत्तुर्थे अध्याये वैज्ञानिक-गणितीय-प्रतिपादनानां भारतीय दर्शनावगाहनाधारित-धारणाभिः सह कीदृशं सादृश्यम्? इति

विवेचनम् उपस्थापितम्। एवम् एतत् स्पष्टम्-यत् भारतीयं गणितं प्रगतिं प्रापितं सत् वैज्ञानिकानां कृते नितरां सहायकं मौलिकानुसन्धानकार्येषु साफल्यम् अधिगमयिष्यति इति निश्चप्रचम्। भविष्यति छात्राः प्रयतेरन्, साफल्यं तु निश्चितमेव।

छात्राणां कृते एतत् पुस्तकं भारतीय-गणितस्य परिचायकं तथा च अनुसंधान कार्यार्थम् उत्साहं जनयिष्यति। प्रत्यध्यायं विविधानि उदाहरणानि समाहितानि (वा असमाहितानि अभ्यासार्थं संकेत-सहितानि) दत्तानि। कतिपयानि उदाहरणानि अध्येतुकामानां कृते, तथा च कतिपयाः समस्याः अनुसंधित्सूनां कृते अनुसन्धेय -विषयवस्तु रूपेण उपस्थापिताः, शोधकार्य-प्रेरणायै।

यद्यपि अत्रत्यं विषयवस्तु संस्कृत-भाषायां वर्तते परम् अत्र गणितीय-सूत्राणि अन्ताराष्ट्रिय-इंग्लिशाक्षर-संकेतैः उपास्थाप्यन्त। पूर्वं तु देवनागर्यक्षर-संकेतान् एव प्रायुञ्जम् (यथा अत्र पुस्तके परिशिष्ट-लेखे)। यदा शिक्षा मन्त्रालयेन व्ययानुदानं प्रत्यज्ञायत तदा अस्मिन् विषये चर्चा अजनिष्ट। सर्वत्र अन्ताराष्ट्रिय -इंग्लिशाक्षर-संकेतैः गणित प्रक्रियाः उपस्थाप्याः इति सम्मतिः प्राप्ता। रशियनाः, जापानीयाः, चीनीयाः तथा च अन्ये वैज्ञानिकाः विद्वांसः विज्ञान विषय वस्तु स्व-स्व भाषासु लिखंति। परम् गणितादि सूत्राणि तु इंग्लाशक्षर संकेतेरैव उपस्थापयन्ति इति साधारणी प्रवृत्तिः। संस्कृतं विद्वांसः अधयनाध्यापने एतत्पुस्तक-प्रयोग-समये इंग्लिश संकेत-स्थाने देवनागरी-संकेतान् एव प्रयुञ्जीरन् इति मे सम्मतिः। संस्कृतम् अजानतां विदुषां

कृतेऽपि एतेन पुस्तकेन इंग्लिश-संकेतैः प्रतिपाद्य-विषय बोधः स्यादेव इति मे विश्वासः। यदि एष ग्रन्थः संस्कृतज्ञानां कृते तथा च नवीन-गणितज्ञानां कृतेऽपि उद्बोधकः सिध्येत्, तदैव मम प्रयत्नः सफलः स्यात् इति मन्ये।

भारतस्य स्वातंत्र्यात् पूर्वं श्री बापूदेव-सुधाकर-वेंकटेश-प्रभृतयः संस्कृत-भाषायां नवीन गणित-ज्योतिष विषये ग्रन्थान् लिखितवन्तः। स्वातंत्र्यानन्तरं बहवः विद्वान्सः प्रान्तीय-भाषासु वैज्ञानिकविषयान् अवलम्ब्य इंग्लिश ग्रन्थान् अन्ववदन्। आस्ट्रेलिया-वास्तव्याः R.J. Baxter महोदयाः श्री रामानुजाचार्यणां मौलिकं नवीन-गणिताधारकं सूत्रम् उपयुज्य समस्याः साधितवन्तः। अस्माकं तु एष प्रयासः संस्कृत-भाषायाम्, परम् नैव अनुवाद-मात्रम् अपि तु प्राचीन-गणिताश्रितानुसन्धान-पूर्वकं प्रतिपादनम्। काञ्चीमठ-परमाचार्याः मम एतां प्रवृत्तिम् आशीर्वचोभिः भृशम् उदसाहयन्।

ये खलु प्राचीन-परम्परया संस्कृत-व्याकरण-दर्शनादि विषयान् अधीतवन्तः, तथा च कृत-गणित-सिद्धान्त-ज्यौतिषाभ्यासाः, एवं च नवीन-पद्धत्या संस्कृत - व्याकरण-दर्शनाद्यधीतिनः, साधारण-नव्य-गणिताभ्यासिनः छात्राः अनुसन्धित्सवः वा वैज्ञानिकाः, ते अत्रत्य-गणितानुशासनेऽधिकारिणः। एवं बहवः विद्वांसः एतेन संस्कृत-प्रकाशनेन लाभान्विताः स्युरिति मन्ये।

मम धर्मपत्नी उषाः तथा च मम पुत्रौ चि.सुबोध-संजय -शर्माणौ एतद्-विषयकानुसन्धान-कार्यार्थं सदैव प्रैरयन् तथा च पुस्तकस्य मुख-पृष्ठादि-प्रस्तवने सहायन्त। एतस्याः प्रेरणायाः एव प्रतिफलमेतत् प्रकाशनम्।

अस्य पुस्तकस्य मुद्रणार्थं श्री मदनलाल भुटानी महोदयाः, प्राबध्नन्, एतदर्थं कृतज्ञ एष जनः। नितिन भुटानी तथा च

गगन सोनी इत्युभयोरपि देवनागरी-लिप्यां संस्कृतोपनिबद्ध -वैज्ञानिक-विषय-वस्तु-जातस्य कम्प्यूटरीकरणे तथा च गणित-सूत्राणां प्रतिलेखने भृशं साहाय्यं प्राप्तम्। एतदर्थम् अहम् आभारम् अनुभवामि।

शक्तिधरः शर्मा

10th Jan, 1999

शिरोनामः-

1219, Phase IX, Mohali (Punjab)

Near Chandigarh,

दूरभाष - *0172-221550*

भौतिकी–गणितम्
Preface

This book would have been published in mid 70's but due to non availability of facilities for composing mathematics and Sanskrit, in Devanagari, the printing press proprietor left the publication just after printing only 52 pages. The author, whatever taught in physics classes during his teaching career, wrote in two languages Sanskrit & English, although only the latter was the language of instructions for classes. The tendency of writing in Sanskrit is due to strong initiation in this languages since his childhood. Ananta Shri parmacharya of Kanchi mutta blessed the author for all this, but always insisted on that the findings from ancient's works, after advancements, should be put in English first, then in Sanskrit.

In 1974 the ministry of Education of Govt. of India under H.R.D. (Sanskrit section) had sanctioned post publication 80% grants for this book and the other two works of mine. Due to failure to get the book printed I suffered monetary loss.

In 1993-94 Dr. T.V. Ramakrishanan then chairman of physics and centre of theoretical studies (C.T.S) of Indian Institute of Sciences (I.I.Sc.) & Dr. N. Kumar (presently director of Raman research institute) hosted me as visiting scientist in C.T.S. for one year and provided me all facilities to compile my work in the form of a book in English. During these years advanced version of the same too got better updated. Now due to

the easy availability of publication facilities with the help of computer software for mathematics & Devanagari script for sanskrit, both the books are ready for publication.

To talk of just history of science is not recommandable. The best aspect of these studies is to take up the guidelines from earlier works and advance for further developments and their uses. Because any discipline if not used will not survive and if put to use will go on flourishing. In my opinion, Indian mathematics can be made use of, for applications in modern scientific problems with advanced & developed versions. It has many branches which will prove really very much useful for solving problems of physics & engineering & telecommunication etc. So the methods are advanced & it is proved through examples that these work very efficiently. Our medical science ayurveda is useful and is being used these days but our non-medical sciences are not put to any use. Here is the first attempt by the author. This book is written in sanskrit partly due to author's affinity with the resource language and partly due to the intension to enrich the same with the new developments which are relevant to the modern times. Any how this book is a not work on history of mathematics but has original developments for utilities of earlier methods in modern disciplines.

This book " भौतिकी-गणितम्" in sanskrit deals with applications of Indian mathematics in ancient times in general & in modern problems in particular. The first two chapters deal with Indian theory of numbers and their applications. 3rd chapter deals with prosodial mathematics analogically applicable to

physics problems. The fourth chapter & the appendix deal with Indian philosophies in relation to mathematics.

In the first chapter the problems of indeterminate equations of first degree are discussed. Vallī is defined in most general form for the first time in this book, while the same was earlier defined just as an array of quotients in finding the highest common devisor of two mutually prime integers. In the general form of vallī we verify the fact that ancient acharyas in their algorithms were performing matrix operations and thus achieved efficiency in solving the related equations. This point is highlighted and applications are demonstrated. Some ideas for further developments are also pointed out, with some problems fully solved and some unsolved problems (with hints) are left as exercises for the students.

Ancient's applications are discussed with possible demonstrations of applications in modern problems. For example the kuṭṭak can be applied to calculate degeneracies in complicated systems in quantum mechanics. A problem of Qunatun mechanical 4-D, oscillator is discussed as an example. Ancient acharyas applied kuṭṭak theory to find the period of apogee of sun's orbit. On analogical grounds many problem of physics can be tackled.

An interesting problem of solving the n'th degree indeterminate equation of the type $y = (Ax^n+B)/C$ is discussed for possible integer solutions in x,y with integer n. It is shown that if one integer solution exists, the number of such solutions is infinite. Applications in solving problems for finding physical functions like legendre's bassel's using recursion relations

are pointed out in the frame work of Vallī algorithm.

In the second chapter Brahmgupta's lemma is put in most generalised form for continuous operations. Cakravāla method is not discussed here. (For this see the above mentioned book in English by the author) Instead the vallī method is developed in traditional style for all the possible additives. A_i's in parallel to vajrābhyāsa methodology. Some interesting problems are solved and some problems are proposed as exercises with hints. The equations which involve quantum numbers (integer & half integer) are referred to as "quantum constraint equations." Using wigner Eckart theorem the equations involving Clabsch Gordon coefficients are tackled and the systematics of multipole moments are discussed using the varagprakṛti theory. The various states are found, where these moments vanish and change sign. In fact this leads to more generalised theorem of moment selection rules in the frame work of collective model, which are hitherto unknown, under the frame work of shell model.

The third chapter deals with prastāra (Indian binary extensions) as applied to prosodial (chandas) theory. The applications in case of varṇa & mātrā chandas are discussed in details. Mātrā chandas problems are discussed using kuṭṭaka theory & it is proved that the number of possible patterns for a given number of mātrās, form a prajanana-vallī known these days as Fibonacci series. A difficult problem of finding the total number of possible Āryā chandas is solved mathematically.

Fourth chapter deals with logistics & epistemological problems. Relations between logistics & mathematics are

elaborated. The limits of inference methodologies are pointed out. The inadequacies of analogical inference methodologies for micro systems, are pointed out and it is advocated that the language of syādvāda of jainas, sānkhya and vedānta philosophies are in unison with the mathematical philosphy based on quantum mechanical concepts.

It is clear from the planning of the book that it will prove useful for students and other interested ones with good background of mathematics, as the text introduces the theoretical topics in ab-initio in simplest traditional style and demonstrates by solving problems and proposing unsolved problems as exercises. It gives alternative methodologies for solving modern problems for advanced students. In addition to this, the proposed topics for developments, will prove guidelines for researchers.

Thanks are due to Dr. T.V. Ramkrishnana & Dr. N.Kumar for encouragements in preparation of this advanced version.

(Suggestions or comments from scholars are welcome.)

Shaktidhara Sharma

10th Jan, 1999

Present Address:
1219, Phase IX, Mohali (Punjab)
Near Chandigarh, Ph.: 0172-221550

क) <u>नवाः परिभाषिताः शब्दाः</u>

1) <u>**वल्ली**</u> - अत्र व्यापकरूपेण परिभाषिता। नवीन-परिभाषानुसारं तत्र पदानि न केवलं पूर्णांकरूपाणि अपितु भिन्नात्मक-करणी-रूपाणि अथवा चलात्मकनि अपि भवितुमर्हन्ति।

2) <u>**वल्ली पुच्छम्**</u> - एकः स्तम्भरूपः आव्यूहः $\binom{a}{b}$ यत्र a,b माने प्रारम्भिके मौल्ये स्तः

3) <u>**वल्ल्याः उद्वलनम्**</u> -वल्ली-प्रजनन-प्रक्रिया।

4) <u>**वल्ल्याः विकोचः**</u> (आकुंचनं वा)-वल्ली द्वारा मौल्य साधनम्

5) <u>**प्रवल्ली**</u> - वल्ल्याः 2×2 आव्यूह-रूपम् (Matrix form)। व्यापकीकरणे तु एतस्याः रूपं $n \times n$ स्यात्, परं केवलं विकर्णद्वये एव अशून्य-पदानि आवहति।

6) <u>**कुट्टनम्**</u>-कुट्टक शब्दात् भिन्नम् समीकरणस्य समरेखिकीयीकरणम्।

7) (अ)<u>**पिमोचः**</u> (अ)पिनाहश्च Disjunction with simultaneous conjunction going on & Vice Versa.

ख) नवाः प्रयुक्ताः संकेताः

a) $\bar{x}$ = x मानम् अधिकतमम्

b) $\underline{x}$ = x मानम् अल्पतमम्

c) $\left(\frac{a}{b}\right)$ → लब्धिमात्र-ग्रहणम्, तक्षणम् (Abrading or Modulus)

d) $\left(\frac{a}{\underline{b}}\right)$ → शेषमात्र-ग्रहणम्, लब्धि-त्यागः

e) <u>**पंक्तिरूपा वल्ली**</u>-प्राचीनकालतः वल्ली स्तम्भरूपा एव

आचार्यैः प्रयुक्ता- परम् अत्र सौविध्यार्थम् तथा च अल्पस्थान-प्रयोग जन्य लाभ-हेतोः पंक्तिरूपा अपि गृहीता। उदाहरण-रूपेण

$$\text{वल्ली} = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 1 \\ \binom{1}{0} \end{cases} = \underline{\overline{01}}13\overrightarrow{2} \quad \text{वा} \quad 231\underline{\overline{10}}$$

अत्र धनुश्चिह्नं प्रक्रियादिशं द्योतयति।

ग) **<u>पाणिनीय-व्याकरण - प्रयोग विषये</u>** (गणित-पाणिनीयम्):- बीजगणितीय-ज्यामितीय-संकेत-स्वीकारे पाणिनीय-व्याकरणेन न निर्वाह अत्र प्रयोगेषु गणितीय-संकेतानां समस्याः सन्ति। वैज्ञानिक-गणितीय-विषय-लेखने एताः समस्याः आशंक्यन्ते एव। अतः नवानां प्रयोगनियमानां विधानम् एव शरणम्।

कतिपये प्रयोगाः अत्र उल्लिख्यन्ते-

i) **<u>" क्रियाभ्यावृत्ति-गणने कृत्वसुच्"</u>** इति पाणिनीय-सूत्रानुसारम् बीजगणितीय चलेभ्योऽपि कृत्वसुच् अध्याहरणीयम् 'n' कृत्वः = 'n' वारम् (n Times) इत्येवम् अर्थापनीयम्। (n-1) कृत्वः = (n-1) वारम्। [(n-1) Times]

ii) **<u>"पञ्चम्यास्तसिल्"</u>** इति पाणिनीय सूत्रानुसारं 'x' तः 'y' पर्यन्तम् (from x to y) = इत्येवम् अर्थापनीयम्।

iii) **<u>"अनुस्वारस्य ययि परसवर्णः"</u>** इत्यस्य सूत्रस्य वैकल्पिकत्वेन प्रयोगः कृतः। यतो हि कम्प्यूटर-साफ्ट वेयर-द्वारा परसवर्णानुनासिक-संयुक्ताक्षर-लेखने समस्याभ्यः काठिन्यम् अनुभूयते। तथाहि 'अंकः' 'अंगम्' इति इत्यादिकाः प्रयोगाः

हिन्दी-भाषायामिव संस्कृतेऽपि स्वीकृताः। शिरोबिन्दु-दानेनैव परसवर्णाः अनुनासिकाः बोध्याः।

iv) **<u>गणित</u>**-पाणिनीये बीज गणितीय-संकेतै सह समासाः स्वीकार्याः। तथाहि $(4k+3)$ रूपम् $= (4k+3)$ इत्येतत् रूपम् इत्येवम् अर्थापनीयम्।

एवमेव $(n_1 \pm n_2)$ क्रमे अभिसार्ये $= (n_1 \pm n_2)$ क्रमः ययोः अभिसार्ययोः, इति (बहुव्रीहि-समासः) ते अभिसार्ये। (Convergecnts of $(n_1 \pm n_2)$ order)

$[\pm(n-1)]$ समीकृत्य $= [\pm(n-1)]$ इत्यनेन समीकृत्य इति तृतीयासमासः $=$ Equating with $[\pm(n-1)]$

v) समासे नित्योऽपि-सन्धिः डैश(-)दान-पुरःसरं वैकल्पिकत्वेन स्वीकर्तव्यः सौकर्यार्थम् स्पष्टीकरणाय च। तथाहि गामा-ऊर्जा $= \gamma$ - energy

VI) **<u>प्रस्तार-प्रकरणे (गुरुं) (गुरू) (गुरून्) = गुरून्</u>**

पिंगल-ऋषि-कृतछन्दः-शास्त्रेऽपि एतादृक्षाः कतिपये प्रयोगाः स्वीकृता एव प्रकामम् व्याकरण विरुद्धाः एते। तत्र मादिभिर्गणैः व्यवहारे संकेतैः समासाः सन्त्येव। यथा - नश्च लघुश्च = नगणः लघुश्चेति नलघू द्वन्द्वसमासः। (समाहार-द्वन्द्वे नलघु इति प्रयोगः) तत्र संकेतेषु लाः = लघवः गा. = गुरवः इत्यादृशाः प्रयोगाः व्यवहारे स्वीकृताः। परम् आधुनिक -बीजगणितीय-संकेत-स्वीकारे प्रकृति-प्रत्यययोः नित्यसम्बन्धः काठिन्यं जनयति अतः अत्र अस्माभिः कृत्वसुच्, तसिल् इत्यादिकाः प्रत्ययाः संकेतैः सह स्वीकृताः। पिंगल पाणिनीयम्

यथा व्यवहारे स्वीकृतम् गणित-पाणिनीयमपि तथा स्यात्। किञ्च पाणिनिरपि संकेताक्षर-प्रत्याहारादिभिः एवमेव व्यवाहार्षीत्। एततदपि ध्येयम्-यत् "चिह्न", "जिह्वा" आदि - शब्द - प्रयोगे कम्प्यूटर-साफ्टवेयरस्य असामर्थ्यात् हकार-न(व)कारयोः संयुक्त-लेखनं नैव सम्भवि।

ॐ गणितं वै ब्रह्म
गणितं ब्रह्म उपास्महे।

प्रथमः अध्यायः

अस्मिन् पुस्तके भारतीय-गणित-शास्त्रस्य विविधानां सिद्धान्तानां विवेचनं प्रतिपादयिष्यते। एतेषां भौतिकी-शास्त्रे प्रयोगाश्च यथा-स्थानं प्रदर्शयिष्यन्ते। नवीन-गणितज्ञाः क्वान्तम-यान्त्रिकी-प्रभृतीनां गणित-शाखानां प्रयोगैः परिणामान् लब्ध्वा स्वकाः भौतिकी-सम्बद्ध-कल्पनाः परीक्षन्ते। अत्र अवकलानुकलन-गणितं पराकाशीय-बहु-विमाक-ज्यामित्यादि-गणितं सम्भावना-सिद्धान्ताः अनिश्चितता-राद्धान्तः इत्यादिकाः विषयाः नितराम् अपेक्षिताः। प्रायः संस्कृतज्ञाः एतेषु विषयेषु न निष्णाताः, परम् तेषां कतिपये भास्करीयादि-गणितं तु जानीयुरेवेति मन्यामहे। अत्र तेषां हिताय भौतिकी-सम्बद्धाः समस्याः विवेक्ष्यन्ते। विशेष-रूपेण च कुट्टक-वर्ग-प्रकृति-प्रस्तारादि-पद्धतीनाम् भौतिकी-शास्त्रे उपयोगाः निदर्शयिष्यन्ते। नवीन-गणितज्ञानां कृते अपि इमे नवीनाः मौलिकाः अनुसन्धान-विषयाः अज्ञात-चरा एव इति प्रतिजानीमहे। एतेषां मौलिक-रूपेण प्रयोगैः भौतिकी-शास्त्रस्य विविधाः समस्याः समाहिताः जायन्ते, तथा च नवाः परिणामाः लभ्यन्ते इति एतत् तथ्यं तु लेखकेन अन्ताराष्ट्रिय - वैज्ञानिक - सम्मेलनादिषु शोधप्रबन्धैः प्रत्यपादि। एतद्-विषयकः प्रथमः शोध-निबन्धः लेखकोपज्ञमेवेति विद्वांसः स्वीकुर्वते एव। इमे विषयाः अपि अत्र समावेश्यन्ते येन आर्यभट-भास्करीयादि-गणित-निष्णाताः परम्परीणाः विद्वांसः एतासाम् गणित-शाखानां भौतिकी-शास्त्रे महत्त्वं बुध्येरन् इति।

किञ्च अस्माकं नव्य-न्यायस्य युक्ति-पद्धतयः हेत्वाभासादि-सिद्धान्ताश्च गणित-प्रयोगेषु बहुशः उपयुक्ताः स्युरित्याशास्यते। परम् अनिश्चितता-राद्धान्ते व्यवस्थाप्यमाने पञ्चावयव-वाक्यादीनां (Syllogism etc.) नव्यतम-न्यायानुसारी विकासः अपेक्ष्यते। एतदर्थं बूलियन-बीजगणितानुसारि (using Boolian algebra) शोध-कार्यम् अपेक्षितम् इति मन्यामहे। अत्र प्रस्तार-पद्धतीनां दार्शनिक-धारणानां च विवेचनानि अपि उपस्थापयिष्यन्ते।

अत्र पूर्व कुट्टक-वर्गप्रकृत्यादि-परिचयः तथा च लैजेण्ड्रे - बैस्सलादि विविधावकल - समीकरण फलनानां मान - साधनो दाहरणानि च उपस्थापयिष्यन्ते। एतेषां प्रयोगैः, वल्ल्यादि-पद्धतिभिः समाधानानि यथा - स्थानं निदर्शयिष्यन्ते। अन्ते च अन्यासां प्रस्तारादि-गणित-शाखानां प्रयोगाः अपि विवेक्ष्यन्ते इत्येषास्ति योजना। यदि संस्कृतज्ञानाम् एतेषु विषयेषु प्रावीण्यम् एतेन ग्रन्थेन जायेत, तथा च नवीनानां गणितज्ञानां कृते अपि एष प्रयासः यदि उद्बोधकः सिध्येत्, तदैव एष प्रयत्नः सफलः स्यात् इत्याशासे। संस्कृतं वैज्ञानिकैः विषयैरपि समृध्नुयात् इत्यतः एते विषयाः संस्कृत-भाषया उपस्थाप्यन्ते।

क) प्रथम घातीयम् अनिर्णीत समीकरणम्

अधुना कुट्टक-वर्ग-प्रकृत्यादि-परिचयार्थं भौतिकी-शास्त्रे उपयोगांश्च दर्शयितुं प्रारभ्यते। अधस्तना अनिर्णीत-समीकार-विवेचना मौलिक - रूपेण नवीन - पद्धत्या अत्र उपन्यस्ता इति अत्र अधीतिनः ज्ञास्यन्ति इति मन्ये। अभिसन्धीयतां प्रथम-घातीयः अनिर्णीत-समीकारः (Indeterminate equation of Ist degree)-

$$\frac{Ax+B}{C}=y \qquad (1.1)$$

यत्र A,B,C पूर्णांकाः सन्ति। यदि एषां त्रयाणामेकः साधारणः गुणकः स्यात् तदा तेन अपवर्तनं विधेयम्। सति साधारणे गुणके तेन अपवर्तितौ, अथवा साधारण–गुणकाभावे तु मूलभूतावेव $A, C,$ पूर्णांकौ अन्योन्यां दृढौ (परस्परां महत्तम–समापर्वतकं रूप – तुल्यम् आवहन्तौ) यदि स्याताम्, तदैव x, y माने पूर्णांक–रूपे लब्धुं शक्येते इति तु स्पष्टमेव। अत्र एतादृशीषु समस्यासु x, y मान–साधन–विधिः कुट्टकः इत्युच्यते। यत्तु श्री–भास्कराचार्य–महोदयैः प्रतिपादितम् – यत् $A,C,$ अनयोः साधारणेन गुणन–खण्डेन यदि क्षेपः B न विभज्येत, तदा उदाहरणमेव खिलोद्दिष्टम् इति तत्तु A, B, C इत्येतेषां पूर्णांकात्मक–रूपाभिप्रायेण एव इति बोध्यम्। यतो हि यदि A, B, माने कस्यचन चलस्य फलने स्याताम् – तदा तस्यां स्थितौ तु चलस्य मानम् अनया परीक्षण–विधया निर्णीय समस्या–भंगः सुसाधः। तथा हि उदाहरणम्–

$$\frac{(3n^3-2n^2-1)x+12}{3n^2-2n-1}=Y \qquad (1.2)$$

अत्र गुणः $(A=3n^3-2n-1)$ तथा च हारः $(C=3n^3-2n-1)$ इत्यनयोः साधारणं गुणन–खण्डम् $=n-1$ अनेन 12 अपवर्त्यम् अवश्यमेव स्यात् अन्यथा त्वेतत् उदाहरणमेव खिलं स्यादिति। अतः 12 अस्य केनापि गुणन–खण्डेन $(12=2\times3\times2\times1=6\times2\times1=12\times1=..$ इत्येवं संचित्य), $\pm(n-1)$ समीकृत्य लब्धम् $n=2,3,4,5,7,13....$ अतः एषां n-मनानां कृते समस्या न खिला इति तु स्पष्टमेव। कुट्टक–समस्या–भंगार्थं

सर्वप्रथमं वल्ली-विधिः श्री आर्यभटमहोदयैः आर्यभटीयाख्ये ग्रन्थे (ईस्वीसंवतः पञ्चम-शताब्द्याम्) उपज्ञातः प्रतिपादितः लभ्यते। चीन-देशीय-गणितेतिहास-विदा श्री नीढाम-महोदयेन आसां समस्यानां भंगार्थम् आर्यभटतः वर्ष-शतकं पूर्वं चीन-देशीय-विदुषा कृतः प्रयासः उल्लिखितः। वस्तुतस्तु व्यापकः भंग-विधिः आर्यभट - महोदयैरेव उपज्ञातः इति नास्ति अत्र सन्देहावकाशः। चीनदेशीय-विद्वदुपज्ञातः विधिस्तु न आर्यभटीय-विधिसदृशः, न वापि व्यापकः। किञ्च एतादृशीनां समस्यानां भंगास्तु शुल्ब-सूत्रेषु इष्टिका-चिति-विषये रव्रीस्ताब्दात् अष्ट-शत-वर्षाणि पूर्वमपि याज्ञिक-विद्वद्भिः उपस्थापिताः लभ्यन्ते। एतत्सम्बन्धि-ज्ञानार्थं पाठकाः शुल्ब-सूत्राणि आपस्तम्ब-कातीय-प्रभृतीनि अधीयीरन् इति सम्मन्महे। किञ्च श्री आयंगर-महोदयैरपि भारतीय-गणित-विषयिणि स्व-पुस्तके एष विषयो विमृष्टः। शुल्ब-समस्यासु समीकरणानां सर्वे सम्भविनो भंगाः अपि साधिताः उपलभ्यन्ते। एतादृक्षाः विषयाः चीन-देशीय-गणितेतिहासे नैव उपलब्धाः। किञ्च सर्व-प्रथमं महर्षिणा लगधेन (1400 B. C.) वेदांग-ज्यौतिषे पूर्णिमामान्त-नक्षत्र-साधने नक्षत्राणां 12 तमान् अंशान् अविभाज्यान् अतः एवं पूर्णांक-समान् स्वीकृत्य परिणामान् साधयित्वा प्रतिपादनम् उपन्यस्तम्। अस्मन्मते तु एष एव सर्वप्रथमम् उपज्ञातः संख्या सिद्धान्त-समस्या-भंगः गणितेतिहासे प्राचीनतमत्वेन स्वीकर्तव्यः इति अस्माभिः स्व-लिखितेषु शोध-प्रबन्धेषु प्रत्यपादि। किञ्च डाईफैन्टाईन-महोदयानां विधिरपि न व्यापकः। आर्यभटीयः वल्ली-विधिस्तु सर्वांग - पूर्णः व्यापकश्चेत्यग्रे स्पष्टीभविष्यति। द्व्यधिकानां चलानां कृते अपि कुट्ट-समस्याः एतेन एव विधिना समाधेलिमाः इति तु भास्करीयादि-बीजगणितेषु सोदाहरणं निदर्शितम् अस्ति इति अलमतिविस्तरेण।

द्वयोश्चलयोः द्विघातीयानिर्णीत - समीकरणानि वर्ग-प्रकृति-सिद्धान्तैः समाधीयन्त आचार्यैः। कुट्टकस्य वर्ग-प्रकृत्याश्च उपयोगः क्वान्तम -यान्त्रिकीय-कुलकेभ्यः सुकर एव। एतत्सम्बन्धि-सिद्धान्त-साहाय्येन नवाः परिणामाः ज्ञातुं शक्यन्ते इत्यग्रे प्रतिपादयिष्यते।

कुट्टक-समीकरण-भंग-विधास्तु आर्यभट-भास्कर-प्रभृतिभिराचार्यैः प्रणीतेषु ग्रन्थेषु लभ्यन्ते एव। अत्र कतिपये विलक्षणाः विचाराः, तथा च समस्या-भंगाः, क्वान्तम-यान्त्रिकीयासु कोणीय-संवेगादि-सम्बन्धिनीषु समस्यासु प्रयोगाश्च उपस्थापयिष्यन्ते। कुट्टकस्य उपयोगः साधारण-रूपेण विजनितता-संख्याः (Degeneracies) ज्ञातुं क्रियते। अत्र प्रायेण साधारणान्येव कुट्टक-समीकरणानि लभ्यन्ते। एनं विषयम् अवलम्ब्य विशिष्टाः विचाराः अग्रे प्रतिपादयिष्यन्ते।

ख) वल्ल्याः मौलिकी नवीना परिभाषा

कुट्टक-समस्यानां समाधानार्थं वल्ल्याः उपयोगो भवति। श्रीमदार्यभटाचार्यैः प्रणीते आर्यभटीये सर्वप्रथमम् एतस्याः पद्धत्याः विवेचनम् उपलभ्यते। वल्ल्याः विकासः वर्गप्रकृति-समीकरण-साधनार्थम् अपि उत्तर-वर्तिषु संस्कृतोपनिबद्ध-गणित-ग्रन्थेषु लभ्यते। अत्र तु वल्ली-विधेः उपयोगः विविध-समीकरण-भंगार्थं बैस्सल - लेजेण्ड्रे - प्रभृति - फलनानां मानानि असकृत्कर्म - सम्बन्धैः (Recursion Relations) साधनार्थं च सौकर्य-प्रदः इत्यग्रे विशकलयिष्यते। वल्ल्याम् उपयुज्यमानः गणित-विन्यासः नितरां सारल्येन गणित-लभ्यानाम् अंकानाम् उत्पादने साहाय्यं जनयति इति बोध्यम्। अल्पतम-वर्ग-पद्धत्याम्, (Method of Least Squares) अन्तर्न्यास-पद्धतिषु, (Interpolation methods) अन्यासु बहुविधासु

गणकसंयन्त्रोपयुज्यमानासु अंकाभिकलन-समस्या-(Numarical Computations) -समाधित्सया स्वीक्रियमाणासु सरणिषु च उपयुज्यमानस्य बहुप्रकारक-गणित-न्यासस्य इव च अस्य विधेः उपयोगं गणितज्ञाः उररीकरिष्यन्ति एव इति मन्ये।

अत्र कुट्टन-विधौ वल्ली-परिचयार्थं कतिपयानि समीकरण -साधनानि प्रदर्श्यन्ते। उदाहरणार्थम्-

(1) निम्नलिखितानि समीकरणानि x,y,z आदिकानां चलानां मानानि ज्ञातुं भंक्तव्यानि –

$$\begin{aligned} y &= 3x + z \\ x &= 2z + r \\ z &= 3r + u \\ r &= 5u + q \\ u &= 7q + n \\ q &= 11n + s \\ \mathrm{n} &= 13\mathrm{s} + \mathrm{t} \end{aligned} \tag{1.3}$$

यदि $t = 0$, $s = 1$ तदा चल-मानानि साध्यानि। अत्र प्रतिसमीकरणं दक्षिणप-क्षस्थानां प्रथमानां पदानां गुणकानि अधोलिखित-विधिना विन्यस्तुं शक्यन्ते। एतादृक्षेषु समीकरणेषु गुणाकानां स्तम्भे अन्ते s,t- माने विलिख्य लब्धा स्तम्भ-पंक्तिः वल्ली इत्युच्यते। अभीषा-कल्पितं (s,t) मान-युगुलं वल्ली-पुच्छम् इति व्यपदेक्ष्यामः। एषा उपन्यस्तिः मौलिक रूपेण नवीना। अत्र तु वल्ल्यां चल-मानानि पूर्णांक-रूपाणि वा भिन्नात्मकानि अपि भवितुम् अर्हन्ति।

तथाहिः- वल्ली

$$\left\{\begin{array}{ll} 3 & 133123 = y \\ 2 & 38785 = x \\ 3 & 16768 = z \\ 5 & 5249 = r \\ 7 & 1021 = u \\ 11 & 144 = q \\ 13 = n & \\ 1 = s & \\ 0 = t & \end{array}\right.$$

एतत् परिकर्म वल्ल्याः विकोचः (आकुञ्चनं वा) इति व्यपदेक्ष्यते।

अत्र x, y मान-साधनार्थम् $s = 1$ पदादारभ्य उपरि उपरि गुणयेत् गुणन-प्राप्त-पूर्व-पंक्तिस्थमंकं च योजयेत्। एवं प्रक्रियया लब्धः अन्तिमः परिणामः y मानं ददाति। प्रतिप्रक्रियम् क्रमेणान्येषामपि चलानां मानानि लभ्यन्ते इति उपरि-दर्शितेन स्तम्भेन स्पष्टमेव। वल्ली-साध्यानां समीकरणानाम् आदर्श-समीकरणं त्वेतदस्ति-

$$S_{n+1} = A_n S_n + S_{n-1} \qquad (1.4)$$

अत्र $S_{-1} = A_{-1} = 0, S_0 = A_0 = 1$ तथा च $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ गुणकानि वल्लीपदानि कुट्टक-गणिते प्रयुज्यन्ते -S-चलानां मानानि साधयितुम्। वस्तुतः (s,t) अनयोः मानानि अन्यान्यपि कल्पयितुं शक्यन्ते इति बोध्यम्। श्री भास्कराचार्य-प्रभृतिभिः विद्वद्भिः केवलं पूर्णांक-रूप-चल-मान-साधनार्थं पूर्णांक-रूप-पद-संवलिता वल्ली एव प्रयुक्ता। वस्तुतः वल्ली-पदानि भिन्नात्मकानि करणीरूपाणि सर्व-विधाभीष्ट-प्रकृतिकानि वा भवितुम् अर्हन्ति। वल्ली-साहाय्येन उपरिदर्शितादर्श-समीकरण-रूपाणां समीकरणानां भंगः सारल्येनैव भवति इत्येष खलु वल्ल्या उपयोगः। कुट्टक-गणिते वल्ली कथं जन्यते? इति स्पष्टीकर्तुम् अधोलिखितं समीकरणम् अभिसन्धीयते -

$$y = \frac{Ax + B}{C}$$

$$y = A_n x + \frac{R_1 x + B}{C} \qquad (1.5)$$

यत्र $A = CA_n + R_1$ तथा च $\frac{R_1}{C} \leq 1$

कल्प्यते $\frac{A_{n-1}x + B}{C} = Z$

$$y = A_n x + Z \qquad (1.6)$$

$$x = \frac{ZC - B}{R_1}$$

पुनरपि भवतु $x = ZA_{n-1} + \frac{ZR_2 - B}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} < 1 \right)$

अत्रेदम् अवधेयम् यत् A- मानानि A, C, अनयोः भागेन क्रमशः वितत-भित्र-विधया लभ्यन्ते इति।

अत्र $C = R_1 A_{n-1} + R_2$

भवतु $\frac{ZR_2 - B}{R_1} = r$

$$\therefore x = ZA_{n-1} + r \qquad (1.7)$$

एवं प्रक्रियया अन्ते A,C अनयोः दृढत्वात् हारः रूप-तुल्य एव लभ्येत। तदा च अन्तिमं समीकरणम् अधोलिखितं रूपम् आवक्ष्यति

$$A_1 = S_o A_o \pm B$$

अत्र S_o — मानम् अनिर्णीतम्। A_o, A_1 इत्यनयोः माने अनिर्णीते अपि सती $A_o = 0, A_1 = B$ कल्पयित्वा उत्थापनेन उपर्युपरि कुट्टनाप्तानां (1.6), (1.7)......... समीकरणानां भंगान् जनयत इति। एतत्तु स्पष्टमेव यत् यदि वल्ली विषमपदा, (विषमा) तदा

ऋणक्षेपे, यदि वल्ली समपदा (समा) भवेत् तदा तु धनक्षेपे गुणाप्ती स्याताम्। तक्षणेन $x, y,$ माने पूर्णांक-रूपे अल्पाल्पे साधिते जायेते, तक्षणे उभे लब्धी तुल्ये ग्राह्ये इति तु भास्करीय-बीज-गणितेऽधीतिनः जानन्त्येव। अत्र निबन्धे एतदेव विवेचितम्-यत् $\frac{A}{C}$– वल्ल्युद्वलने, (A/C महत्तम-समापवर्तक साधने, लब्धि-जात-ग्रहणे) पूर्वोदाहरण-दर्शित-समीकरण-तुल्यानि समीकरणानि लभ्यन्ते, यानि सारल्येन भंक्तुं शक्यानि इति। अत्र संश्लिष्ट-कुट्टक-रूपक्षेप-कुट्टकादिविधयः श्री भास्करीये बीजगणित एव द्रष्टव्याः।

(ग) <u>अधुना वितत भिन्न–पद्धत्या कुट्टकीय-समीकरण-भंग-विधिः उदाहरणैः विविच्यते–</u>

1) $$y = \frac{29x + A}{17}$$

अत्र $$\frac{29}{17} = 1 + \frac{12}{17} = 1 + \frac{1}{17/12} = 1 + \frac{1}{1 + 5/12}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2\frac{2}{5}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 1/2}}} \qquad = 12/7$$

(वल्ली समा।)

अत्र अन्तिमं भिन्नं त्याज्यम् (अधश्चिन्हितं त्यक्तम्)

अतः रूपक्षेपे x मानम् $= 7$

" y " $= 12$ (1.8)

A क्षेपे तु $x = 7A, y = 12A$

2) एवम् - अन्यानि सर्वाण्यपि कुट्टकीय-समीकरणानि वितत-भिन्न-रीत्या भंक्तु शक्यानि। अत्रेदम्-अवधेयम्-यत् यदि

विततभिन्ने वल्ली-पदानि विषमाणि तदा ऋणक्षेपे गुणाप्ती लभ्येयाताम्, ते तु स्वहार-शुद्धे एव अभीष्टे भवेताम् इति।

तथाहि— 2) $\frac{11x+5}{7} = y$ (1.9)

$$\frac{11}{7} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{1+5/5}$$ (−5 क्षेपस्य कृते)

$$= 1 + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$$

$$x = 7 - \left(\underline{\tfrac{10}{7}}\right) = 4$$

$$y = 11 - \left(\underline{\tfrac{15}{11}}\right) = 7$$

यत्र $\left(\underline{\frac{a}{b}}\right)$ संकेतस्तक्षणम् (लब्धित्यागम्, शेषग्रहणम्) अभिव्यंक्तुं प्रयुक्तः।

$\left(\overline{\frac{a}{b}}\right)$ संकेतश्च $\frac{a}{b}$ अत्र शेष-त्यागे लब्धिमात्र-ग्रहणम् अभिव्यंक्तुं प्रयोक्ष्यते।

(3) कुट्टनविधिस्तु वस्तुतः निरसन-विधेः विलोम एव। तथाहि-यदि

$$x = 3c + 1 \tag{1.10}$$

$$y = 5c + 2 \tag{1.11}$$

$$5x - 3y = -1$$

$$y = \frac{5x+1}{3} \tag{1.12}$$

(1.12) समीकरणस्य कुट्टनेन (1.10), (1.11) समीकरणे एव लभ्येयाताम् अतः अस्य विधेः निरसन-विधि-वैलोम्यं

स्पष्टमेव।

अधुना कुट्टकीयं सिद्धान्तं विशकलय्य कतिपयाः समस्याः गणितज्ञ-विनोदार्थं समाधीयन्ते। तथाहि भास्करीयमुदाहरणम्—

4) नवभिः सप्तभिः क्षुण्णः को राशिस्त्रिंशता हृतः।
यदग्रैक्यं फलैक्याढ्यं भवेत् षड्विंशतेर्मितम्।।
कल्प्यते संख्या $= x$

$$\frac{7x}{30} = q_1 + r_1 / 30 \qquad r_1 < 30$$

$$\frac{9x}{30} = q_2 + \frac{r_2}{30} \qquad r_2 < 30$$

$$\therefore q_1 = \frac{7x - r_1}{30}$$

$$q_2 = \frac{9x - r_2}{30}$$

$$q_1 + q_2 + r_1 + r_2 = \frac{16x + 29(r_1 + r_2)}{30} = 26$$

$$x = \frac{-29(r_1 + r_2) + 780}{16} \tag{1.13}$$

एतत्तु तदैव युज्यते-यदि (r_1+r_2) मानं चतुर्भिरपवर्त्यं स्यात् अन्यथा तु उदाहरणमेव खिलं भवेत्।

$\therefore r_1 + r_2 = 4r$ (भवतु)

$$\therefore x = \frac{-29r + 195}{4}$$

तक्षणेन $r = 4c + 3$ वल्ली $\begin{cases} 7 \\ 1.95 \\ 0 \end{cases}$ 1365

लब्धिः $= 27$

परन्तु $x > 0$ $\therefore -29r + 195 > 0$

$r \le 6$

किञ्च $r > 0$

एवं च निर्णयनेन एतत् स्पष्टमेव यत् $r = 3$ यतो हि

$r = 4c+3$ $\therefore$ $c = 0$ एव सम्भवति।

$\therefore$ $x = 27$

एषा धनर्णात्मक-प्रकृत्या निर्णयन-पद्धतिः नितराम् उपयुक्ता। अत्र या भास्कराचार्य-प्रयुक्ता पद्धतिःसा तु नैव व्यापिका।

5) उदाहरणान्तरं श्रीभास्करीयं यथा-

कस्त्रयोविंशति-क्षुण्णः षष्ट्याऽशीत्या हृतः पृथक्।
यदग्रैक्यं शतं दृष्टं कुट्टकज्ञ वदाशु तम्।।

कल्प्यते अभीष्ट-संखया $= x$

$$\frac{23x}{60} = q_1 + \frac{r_1}{60}$$

$$\frac{23x}{80} = q_2 + \frac{r_2}{80}$$

$$r_1 + r_2 = 100 = 46x - \{60q_1 + 80q_2\} \quad (1.14)$$

$$x = \frac{10(3q_1 + 4q_2) + 50}{23} \quad (1.15)$$

कुट्टक-विधिना 23

$$x = 10c + 10 \tag{1.16}$$

$$3q_1 + 4q_2 = 23c + 18 \tag{1.17}$$

(1.17) ,समीकरणात्

1 2 1 2

$$x = \frac{10(3q_1 + 4q_2) + 50}{23}$$

$$x = 10c + 10$$

$$3q_1 + 4q_2 = 23c + 18$$

$$q_1 = \frac{-4q_2 + (18 + 23c)}{3}$$

$$= -q_2 + 6 + 7c + \frac{2c - q_2}{3}$$

$x >$ $\therefore c > -1$

परम्

$x \neq 0, \quad c \neq -1 \qquad \therefore c > 0$

$r_1 < 60$

$q_1 > 0, q_2 > 0$

${}_2 < 80$

$r < 80$

इत्येताः निर्णायिक्यः स्थितयः निम्नलिखितं परिणामं ददति-

$c = 1 \;\; \therefore \quad x = 20$ (अल्पतमम्)

श्री भास्कर-प्रभृतिभिराचार्यैः निर्णायक-विधिः न विमृष्टः। एनेन विधिना अंकात्मक-कल्पना (यथा श्री भास्कराचार्यैः स्वीकृता) उपेक्षितुं शक्यते। वस्तुतः एष निर्णायकः विधिरेव वास्तविकः उपयुक्तः प्रकारो विद्यते।

अधुना अत्र एतद् दर्शयिष्यते यत् कतिपयाः वर्गरूप-गुण-युताः समस्याः अपि कुट्टकेन सारल्येन समाहिताः जायन्ते। तथाहि उदाहरणम्—

6) $$\frac{19x^2+2}{13} = y \tag{1.18}$$

$$y = 19c + 6$$

$$x^2 = 13C + 4$$

$$\therefore x = \sqrt{13c+4}$$

$$c = 9, x = 11$$

$$\therefore x = \sqrt{13c+4} == 13k + 11$$ (भास्कराचार्य-पद्धत्या)

$$\therefore c = 13k^2 + 22k + 9$$

$$\therefore x = 13k + 11$$

$$y = 247k^2 + 418k + 177$$

अन्यदपि

7) $$\frac{23x^2+3}{13} \tag{1.19}$$

$$\therefore \frac{23}{13} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{7}{4} = \frac{21}{12}$$ (−3 क्षेपाय)

$$x^2 = 13 - 12 = 1$$

$$x^2 = 13c + 1 = (13k+1)^2$$

$$c = 13k^2 + 2k$$

$$y = 23c + 2$$

$$\therefore y = 299k^2 + 46k + 2$$

एवं वस्तुतः $y = \frac{Ax^n + B}{C}$

इत्येतत् समीकरण भंक्तुं शक्यम्। परम्

$$y^m = \frac{Ax^n + B}{C}$$

यत्र m, n उभौ अपि पूर्णांकौ स्तः। एतस्य व्यापकस्य कुट्टकीय–समीकरणस्य भंगः सर्वेषां m,n,A,B,C मानानां कृते न सम्भवी। यदि $m = n = 2$ तदा तु वर्गप्रकृति–समीकरणमेव स्यात्। अस्य अपि भंगः सर्वास्वपि स्थितिषु न सम्भवति। केषांचन A, C मानानां कृते यदि x कुट्ट्येत तदा y- रूपं न सुकुट्टम्। यदि च y- रूपं कुट्ट्येत तदा x- रूप–कुट्टनं न सम्भवति।

(घ) **चलत्रय–कुट्टनम्**- *(Pulverization of three variables)*

8) यदि $3x+4y+5z = 17$

$x,y,z \neq 0$ तथा च x, y, z धनात्मिकाः पूर्णाः संख्याः सन्ति। तदा तासां मानानि साध्यन्ताम्।

अत्र $3x + 4y > 0$

$\therefore 17 - 5z > 0$

$\therefore \overline{z} = 3$, परम् $\underline{z} = 1$

यत्र उपरि–संकेतः '—' अधिकतमं, तथा च अधः संकेतः '–', अल्पतमं धनात्मकं मानं सूचयति।

$\therefore 1 \leq z \leq 3$

प्रथमा स्थितिः $z = 1$, $3x + 4y = 12$ (1.20)

द्वितीया स्थितिः $z = 2$, $3x + 4y = 7$ (1.21)

तृतीया स्थितिः $z = 3, \qquad 3x + 4y = 2 \qquad (1.22)$

(1.20)....(1.22) समीकरणानि कुट्टयितुं शक्यन्ते। निर्णयन -विधया च अभीष्ट-राशेः मौल्यान्यपि निर्धारयितुं शक्यन्ते। अत्र समीकरणं (1.20) तु विशेष-रूपेण अवधानार्हमस्ति। यदि y-मानं त्र्यपवर्त्यं स्यात् तदा तु प्रथमा स्थितिरेव संगच्छते इति तु स्पष्टमेव। एवमेव बहूनामपि चलानां कुट्टनम् ईषत्करं भवति। एष विधिस्तु उपलक्षणम् एव। एतादृक्ष्यः समस्याः क्वान्तम-यान्त्रिकीय-बहु-कण-कुलेकभ्यः विजनितता (Degenracies)-ज्ञानार्थं समाधेयाः स्युरिति भौतिकी-शस्त्रज्ञाः जानन्त्येव।

(ङ) वल्ली-पद-क्षय-विचारः, वल्ल्यन्त-पद-परिवर्तन-प्रभावश्च

9) भवतु $\dfrac{8x+1}{5} = y$

पूर्णया वल्ल्या $x = 3$

$y = 5$

अत्र यदि वल्ल्याः पदानि कतिपयानि वर्ज्येरन्, अन्तिम-पदाग्रे च (वल्ली-पुछ-पदे) $\binom{1}{0}$ स्थाप्येयाताम्, वल्ली च संकोच्येत, तदा गुणाप्ती महत्तमापवर्तक - साधन - विधौ च्यावित - पद - भाज्य - तुल्यस्य क्षेपस्य कृते भवेताम्। क्षेपस्य चिह्न तु वल्ली-समत्व-विषमत्वाभ्यामेव निर्णेयम्। तथा चात्रोदाहरणे-

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \underline{2/3}} \rightarrow \frac{2}{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 1 \end{array}\right\}$$

(+2 क्षेपाय)

पुनरपि $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ x=1 \end{array}\right\} - \qquad (-3 \text{ क्षेपाय})$$

यदि वल्ल्युद्वलने क्वचन द्रढ़न-प्राप्त-भाज्य-क्षेपः मूल-समीकरण-क्षेपापवर्त्यः लभ्येत, तदा तु प्रक्रियातः विरन्तुं शक्यते-इति नास्त्यत्र संशीत्यवकाशः। तथा च मूल - समीकरण - क्षेपतुल्यो भाज्य - क्षेपो यदि लभ्येत तदा तु वल्ल्युद्वलनाद् विरन्तव्यम्। वर्गप्रकृति-सम्बन्धिन्यां वल्ल्याम् अपि यत्र क्वचनापि विरामे तत्-सम्बद्ध-हार-तुल्य-धनर्ण-क्षेपाय$\binom{1}{0}$ - तुल्य -वल्ली-पुच्छेन संवलने तत्संकोवेऽनुष्ठिते कनिष्ठ-ज्येष्ठे लभ्येते-इत्यग्रे स्पष्टीभविष्यति। वर्गप्रकृति-वल्ली तु आवर्तिनी भवति परं कुट्टकीय-वल्ली तु आवर्त-प्रकृतिं नावहति। अतः कुट्टक-वल्ल्यां पूर्णायां पद-कुलक-वृद्ध्या न केचनापि नवीनाः परिणामाः लभ्यन्ते, -इति नातिरोहितं स्यात् कुट्टकज्ञानाम्। यतोहि अन्ते शून्य-तुल्यानि एव पदानि आवर्तेलिमानि स्युः। एवं च $\binom{1}{0}$ पुच्छेन संकोचे कश्चिदितरः पूर्ण-कुलक-साहाय्येन लभ्यमानात् परिणामाद् अतिरिक्तः परिणामः न लभ्यते।

(10) यदि x, y धनात्मिके पूर्ण-संख्ये स्तः, तथा च-

$$\frac{5x+1}{12}=y$$

तदा साध्यमेतत् यत् $169(x^2+y^2)-1$, अस्य मानं सदैव पूर्ण-वर्गात्मकं स्यादिति।

कुट्टनेन - $\begin{array}{l} x = 12c + 7 \\ y = 5c + 3 \end{array}$

$$169(x^2 + y^2) - 1 = 13^2[(12c + 7)^2 + (5c + 3)^2] - 1 = (13^2 c + 99)^2 =$$

पूर्णः वर्गः।

एवञ्चैतदपि बोध्यम् यत् $169(x^2+y^2)-1$ अस्याल्पतमं मानम् = 99^2

(11) यदि $\frac{5x+1}{12}=y$, यत्र x, y पूर्णे धनात्मके संख्ये स्तः। तदा साध्यमेतत् यत् $7x-16y$ मानं चतुर्भिर्विभक्तं सत् शेषं रूपतुल्यं ददाति इति।

$$x=12c+7$$
$$y=5c+3$$
$$7x-16y=4c+1$$
$$\left(\underline{\frac{7x-16y}{4}}\right)=\left(\underline{\frac{4c+1}{4}}\right)=1$$

अत्र शेषमानम् = 1

(12) यदि x, y पूर्णे धनात्मिके संख्ये स्तः तथा च $\frac{13x+1}{17}=y$, तदा $\left(\overline{\frac{x-y}{4}}\right)$ मानं साध्यताम्।

कुट्टनेन
$$x=17c+13$$
$$y=13c+10$$
$$\therefore \overline{\frac{x-y}{4}}=\overline{c+\frac{3}{4}}=c$$

शेषमानम् = 3

परं लब्धिमानं तु अनिर्णीतम् एव इत्यत्रावधेयम्।

(13) साध्यताम्, यत् उपरि-लिखिते (12) उदाहरण - सम्बन्धिनि कुट्टकीये समीकरणे $6x - 2y - 1$ मानं 19 अनेन अपवर्त्यं वर्तते इति।

अत्र $x = 17c + 13$

$y = 13c + 10$

$$\dots\left(\frac{6x - 2y - 1}{19}\right) = 0$$

(14) तक्षणे लब्धि-भेदे कारणं तु क्षेप-मानस्य आधिक्यं भवति।

तथाहि यदि $\frac{73x + 1}{17} = y,$

अत्र वल्ली-विधया

परम् यदि $y = \frac{73x + 90}{17}$

तदा वल्ली-पद्धत्या गुणः $= 2700$, हारः $= 630$

$$\left.\begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 43 \end{aligned}\right\}$$ (तुल्ये तक्षण-लब्धी)

अत्र तक्षण-लब्ध्योरन्तरम् एक-तुल्यं लभ्यते, परं कुट्टन - विधौ लब्धिः तुल्यैव ग्रहीतव्या इति नियमः। एवं च

$$x = -1,\ y = 1$$

तक्षण-लब्ध्योरन्तर-निर्णायिका स्थितिस्तु समीकरणानां (कुट्टने पृथग्-लब्धानां) निभालनेन व्यवस्थापयितुं शक्यते, -इति तु स्पष्टमेव।

(15) कुट्टक - विधिः श्रीभास्कराचार्य - महोदयैः अन्यैश्च गणकैः ज्यौतिषसम्बन्धि - समस्या - समाधानार्थं प्रयुक्तः। सूर्य

– मन्दोच्च – भगण–कालः (Time period of Sun's Apogee) कुट्टकेनैव ज्ञातः। वेदांग–ज्यौतिषे महर्षिणा लगधेनापि च पूर्णिमामान्त –नक्षत्रांश–साधनं कृतम्, तथा च अन्याः समस्याः आचार्यैः समाहिताः। श्रीमदार्यभट–महोदयैः भृशं रोचकम् उदाहरणमेकम् एव समाधीयत। महाभास्करीये अपि वल्ली–कुट्टाकार –वार–कुट्टाकार–वेला–कुट्टाकारादि–भेदैश्च भृशं विमर्शः प्रस्तुतः। श्री गुलजार–महोदयैः स्व पुस्तके, तथा च भक्षाली–हस्तलिपि–गणिते अस्य विवेचनं प्रतिपादितम्–इति तत्रैव द्रष्टव्यम्। श्रीमद्भिः K.L. दफ्तरी–महोदयैः महाभारत–युद्ध–कालीन – ग्रहस्थिति–वर्षाणां साधनार्थं कुट्टकः प्रयुक्तः, निर्णयन–विधया च वर्ष–तिथ्यादि–निर्णयः कृतः इति तस्य पुस्तके एव द्रष्टव्यम्।

(16) यदि $A = \dfrac{31B}{41 \times 71}$ अत्र गुणकम् $\dfrac{31}{41 \times 71}$ एतत् आंशिक–भिन्नरूपेण (In the form of partial fractions) अभिव्यज्येत तदा गणिते सारल्यं स्यात्। अत्र कुट्टक–साहाय्येन

$$\frac{31}{41 \times 71} = \frac{C}{41} + \frac{D}{71}$$

C, D माने ज्ञात्वा समस्या–भंगः सुसाधः। गुणकानाम् एतादृक्षाणि आंशिक–भिन्नात्मकानि रूपाणि गणित–सौकयार्थं ग्रहलाघवादिषु करण–ग्रन्थेषु प्रयुज्यन्ते। कुट्टक–सिद्धान्त–साहाय्येन अतिशयेन सारल्यार्थम् आंशिक–भिन्न –रूपाणि समाधानानि सुसाधानि इति बोध्यम्। बीज–गणितीय–व्यञ्जकानाम् आंशिक–भिन्नात्मकानि रूपाणि अपि अनया विधया सुसाधानि। तत्र आंशिक–भिन्न–परिभाषा प्रयोक्तव्या निर्णयार्थम् इति बोध्यम्। वस्तुतः साधारण्येन बीजगणितीय–व्यञ्जकादीनां सर्वविध – तादात्म्य –रूप–साधनार्थं वल्लीविधेः उपयोगः महत्वपूर्णः सिध्येत् इति नास्त्यत्र संशीत्यवकाशः।

(च) कुट्टक-समस्याः, विशिष्टाः विचाराः, भौतिकी-शास्त्रे प्रयोगाश्च

यदि $\frac{Ax^n + B}{C} = y$ यत्र $n =$ एकः पूर्णांकः धनात्मकः, तदा x- मानं विशिष्ट-स्थितिषु साधयितुं शक्यते। भवतु

$$x^n = CK + D_0 = (CL + D_1)^n$$

यत्र $\frac{D_1^n - D_0}{C}$ = एकः पूर्णांकः

व्यक्तोदाहरणेषु समस्याः सारल्येनैव समाधातुं शक्यन्ते। तथाहि

17) भवतु उदाहरणम्— $\frac{3x^5 + 1}{5} = y$

कुट्टनेन $\begin{cases} x^5 = 5c + 3 \\ y = 3c + 2 \end{cases}$

$$x^5 = (5c + 3) = (5k + 3)^5 \left[\therefore \frac{3^5 - 3}{5} = 48 \right]$$

$\therefore x = 5k + 3$

$c = 5^4 k^5 + 3 \times 5^4 k^4 + 18 \times 5^3 k^3 + 54 \times 5^2 k^2 + 405k + 48$

$y = 3 \times 5^4 k^5 + 9 \times 5^4 \times k^4 + 54 + 5^3 \times k^3 + 162 \times 5^2 k^2 + 1215k + 146$

यत्र $k = 0,1,2,3....$

एवमेव $\frac{Ax + B}{C} = y^n$ समीकरणम् अपि x, y पूर्णांक-रूप-मानानां कृते विशिष्ट-स्थितिषु अवमूलयितुं शक्यते।

18) यदि $5x + A^2 = y^2$ तदा पूर्णांकरूपे x, y माने पूर्णांकरूप-प्राचल-k-पदैः साध्यें।

$$y = \sqrt{5x + A^2}$$

स्पष्ट–रूपेण $x = 3A^2$ $y = 4A$

$$y = \sqrt{5x + A^2} = (5k = 4A)$$
$$x = 5k^2 + 40kA + 3A^2$$

(19) यदि वल्ल्यन्ते $\binom{1}{0}$ पुच्छ स्थाने अभीष्ट–प्राचलमाने $\binom{c_1}{c_2}$ उपयुज्येयाताम् तदा वल्ली–संकोचे मानानि आलापकानि लभ्येरन् एव। परम् इमानि अल्पतम–पूर्णांकरूपाणि न स्युरिति तु स्पष्टमेव

(20) यदि $S_{n+1} = \cos(\theta_n)S_n + S_{n-1}$

एकम् अन्तर–समीकरणं *(Difference Equation)* भवेत् तथा च $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots \theta_n$ मानानि $\pi/_1 . \pi/_2, \pi/_3 \ldots . \pi/_n$ स्युः तदा S_8 मानं वल्ली–कलन–विधिना साध्यम्। यत्र $S_{-1} = 0, S_0 = 1$

(21) $S_{r+1} = A_r S_r + B_{r-1} S_{r-1}$

एतत् समीकरणं व्यापकं वल्ली–रूपं बिभर्ति। अस्य नाम प्रवल्ली इति स्वीकुर्मः। अस्या अपि उपयोगः बहुत्र सौकर्यप्रदः।

(22) बैसल–लेजेण्ड्रे–प्रभृति–फलनानां मान–साधनार्थम् असकृत्कर्म – सम्बन्धस्य प्रयोगैः (5) दर्शितादर्शरूपायाः व्यापकीकृतायाः वल्ल्याः उपयोगः ईषत्करः सौकर्यप्रदश्च सेत्स्यति इति।

(23) यदि $S_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} S_n + S_{n-1}$

तदा S_4 मानं साध्यम् यदि $S_{-1} = 0, S_0 = 1$

$\left(S_4 = \dfrac{15}{8}\right)$ उत्तरम्

(24) भौतिकी–शास्त्रीय–क्वान्तम–यांत्रिकीय–शाखायाम् क्वान्तमपदैः

अनिर्णीत-समीकरणानि प्रथमघातीयानि लभ्यन्ते, तानि खलु नाभिकीया-द्यवस्थानां तरंग-संख्याः तरंगांश्च विशिंषन्ति। विजनितता-ज्ञानार्थं कतिपय-चल-संवलितानामेषां समीकरणानां सर्वाण्यपि सम्भवीनि समाधानानि साधयितुं क्वान्तम-निरोध-साहाय्येन (with the help of quantum constraints) प्रयत्यते। यदि तु समस्या बहु-कण-विमासम्बन्धिनी विविधावस्था-विजनितततया विशिष्टा भवेत्, तदा तु कुट्टक-समीकरणानि विविध - रूपाणि प्राप्येरन् इत्यवधेयम्। तथाहि-यदि कस्यवन चतुःसंख्याकावर्तक-विशिष्टस्य कुलकस्य समस्या अधीयेत तदा अस्य ऊर्जामानम्-

$$E = \sum_{i}^{4} (n_i + 3/2)\hbar w = (N+6)\hbar w$$

अत्र आवर्त-संख्या प्रत्येकम् आवर्तकानां w तुल्यैव स्वीकृता। यदि $N = 10$ भवेत्, तथा च कस्याश्चन अवस्थायाः कृते $n_1 = n_2 = n_3 = n$ स्यात् तदा-

$$3n + n_4 = 10$$

$$\therefore n = \frac{10 - n_4}{3}$$

$$\therefore n_4 = 3t + 1$$

कुट्टनेन $n = 3 - t$

यत्र t = एकः प्राचलांकः।

यतो हि $n > 0$ अतः $t = 0, 1, 2, 3.$

एवं चैषावस्था चतुर्धा विजनिता विद्यते इति निर्णयन-विधिना स्पष्टमेव। बहु-संख्याकावर्तक-कुलकस्य कृते तु विजनितता अत्यधिका स्यादेव। यतोहि प्रत्येकं त्रिविमाकस्य आवर्तकस्य कृते r-तमायाः अवस्थायाः विजनितता (Degeneracy)

$$D = {}^{r+2}C_r$$

(यदि $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \ldots\ldots\ldots$)

(25) किञ्च कुट्टन-साहाय्येन $C^{j_1\ \frac{1}{2}\ \ j}_{m_1\ \frac{1}{2}\ m_1 \pm \frac{1}{2}}$ क्लैब्श - गौर्डन - गुणकयोः (Clebsch Gordon coefficients) कृते प्राचलीये व्यञ्जके अपि सिध्यतः तथाहि-

$$C^{(qt-1)\ \ \frac{1}{2}\ \ qt-\frac{1}{2}}_{(2p-q)t\ \ \frac{1}{2}\ (2p-q)t+\frac{1}{2}} = \sqrt{p/q}$$

एवमेव

$$C^{qt\ \ \ \frac{1}{2}\ \ qt-\frac{1}{2}}_{(q-2p)t\ \frac{1}{2}\ (q-2p)t\,+\,\frac{1}{2}} = \sqrt{p/q}$$

यत्र qt, pt पूर्णांकौ वा अर्धरूपौ। स्तः। अत्र p/q एकम् अकरणीरूपं सरलं भिन्नं [Rational fraction] विद्यते। तथा च $p \leq q$ अतः $p/q \leq 1$ विद्यते इति बोध्यम्।

(26) विशिष्टासु स्थितिषु प्रथम-घातीयानि समीकरणानि "विशिष्टाभिः तरंगिकाभिः कुलकस्य अवस्था विशिष्टं रूपं बिभर्ति" इति निर्दिशन्ति। एतानि खलु समीकरणनि विविधानां कल्पनानाम् अथवा विशिष्टानां भौतिकी-नियमानाम् अनुवाद-मात्रमेव। एतेषां भङ्गैः भौतिकी-सम्बद्धाः नियमाः लभ्येरन् एव इत्याशास्यते। किञ्च क्वान्तमांक-समीकरणानां सर्वेऽपि भंगाः न मान्याः, केवलं पूर्णांक-पूर्णांकार्धरूपाः एव भंगाः अर्थापयितुं शक्यन्ते, यतोहि ऊर्जा प्रखण्ड-रूपा *(Descret)* प्रकृतौ लभ्यते इत्येतदेव तथ्यम् अत्र विविधानां भौतिकी - घटना - विशेषाणां प्रखण्ड

- कल्प - विधया सम्भवे कारणम्। अनिर्णीत-समीकरणानि प्रखडत्वाधारित-निरोधान् (*Descretness Based Constraints*) सूचयन्ति प्रकृति-नियमांश्च सम्बध्नन्ति इत्यग्रे विवेक्ष्यते।

(27) आर्यभटीयः वल्ली-कलन-विधिः (Aryabhat's Valli alogrithm) युक्लिडीय (Uclid's)-कलन-विध्यपेक्षया क्षिप्रतरः भृशं विकसितः सरलया प्रक्रियया फलानि जनयति इति बोध्यम्। अस्य कलन-विधेः प्रयोगः वल्ल्याः व्यापकं रूपं स्वीकृत्य बहुत्र समस्यासु कर्तुं शक्य इत्यग्रे द्वितीयाध्याये स्पष्टीभविष्यति। आर्यभटस्य कृते वल्ल्याः श्रेयः स्वीकुर्वद्भिः अस्याः नाम आर्यिका इति स्वीकर्तव्यम्। आर्यिकायाः गोधूमादि-वल्ल्या इव जनित्रता क्रमिक-कणोपम-चलमान-रूप-फलानुसारिणी एव इत्यतः अस्याः नाम्नः सार्थकत्वं स्पष्टमेव।

(28) मन्दोच्चादि-भगण-साधने (In determining Time period of Sun's Apogee) क्षयमास-सम्भवावधि-साधनादौ च कुट्टनस्य प्रयोगे कल्पभगणदीनां मानानि चेद् बृहन्ति स्वीकृतानि स्युः, तदा अशुद्धीः अल्पयन्ति। तेषां बृहत्त्वात् स्वल्पान्तरणाप्तानि फलानि शुद्धतराणि स्युः इति बोध्यम्। यदि कल्पावधयः अल्पाः स्वीक्रियेरन् तथा च कल्प - भगणाः अल्प-मानाः स्युः, तदा अशुद्धयः अधिकतराः भवेयुः इति अवधेयम्।

(29) भाज्यहार-क्षेपाणां पूर्णांकत्वाभावेऽपि स्वल्पान्तरणेन दशम-लवेषु गुण-लब्धी पूर्णांकरूपे लब्धुं शक्येते। तत्र स्वल्पान्तरणे यदि लव-वर्जितेषु पूर्वमेव भाज्यहारौ एकेनैव गुणकेन संगुणय्य

अंकाः बृहन्तः उत्पाद्येरन्, तदा कुट्टक-लब्धाः परिणामाः भौतिकीः स्थितीः सुष्ठुतरम् आलापयेयुः इत्यतः तत्र बहुविधाः परिणामाः श्रेष्ठतरालापकाः सुलभाः एव। जैन ज्यौतिषे अस्माकं शोध-निबन्धेषु ग्रहण-चक्रसाधने (राहु-गति-ज्ञानात् पूर्वं पञ्च- संवत्सर -युगीय-परम्परीणे गणिते) कुट्टक - प्रयोगेण परिणामाः साधिताः इति ते तत्रैव द्रष्टव्याः। चन्द्रमसः छत्रातिछत्रयोगे अपि च एतादृशः एव विधिः प्रयुक्तः। पञ्च संवत्सर-युग-प्रारम्भात् 469 तमे चन्द्र-मण्डले छत्रातिछत्रयोगो भवति इति सिध्यति। कुट्टक-गणित-साहाय्येन श्रीलगधस्य पर्वान्त-नक्षत्र-साधने अपि एषा पद्धतिःस्वल्पान्तरण-सिद्धान्तानुसारं युज्यते एवेति नास्यत्र संशीति-लेशः। महाभारत-काल निणयार्थम् अपि कुट्टकस्य प्रयोगः कृतः कतिपयैः विद्वद्भिः।

(30) अद्यत्वे प्रयुज्यमानः समशेषतादि-विधिः (Method of Congruences, to Modulo, or residues) प्रथम-घातीयानिर्णीत-समीकरण - प्रक्रियायां कुट्टकीय - वल्ल्यपेक्षया क्षिप्रतरः प्रकामं स्यात्। परम् व्यापकीकृतः वल्ल्याश्रितः द्विघातीयादि -समीकरण-कुट्टन - विधिः सर्वेषामपि नवीनानां विधीनाम् अपेक्षया क्षिप्रतमः, बहूनि च समाधान - क्षेत्राणि सुसाधकत्वेन अश्नोति इति तु अग्रिमाध्यायेषु यथा - स्थानं विवेचनेन स्फुटीभविष्यति।

द्वितीयः अध्यायः

कुट्टक - सिद्धान्तान् तेषामुपयोगांश्च विविच्याधुना वर्गप्रकृति - सिद्धान्तानां विवेचनं प्रारभामहे-

क) वर्गप्रकृति समीकरणम्, ब्रह्मगुप्त प्रमेयं च

$$Nx^2 + A = y^2 \tag{2.1}$$

यत्र N, A, पूर्णांकौ स्तः। पूर्णांक-रूप x, y माने साधयितुम् अनिर्णीत-द्विघातीय-समीकरण-भंग-विधिः "वर्ग-प्रकृतिः" (Quadratic Forms) इत्युच्यते। एतस्य कतिपये भंगाः शुल्ब-सूत्रेषु अपि ज्ञाता आसन् इति गणितेतिहास-विदः जानन्त्येव। वस्तुतः अस्य भंगः ब्रह्य-गुप्त-महोदयैः षष्ठ-शताब्द्यां सर्वप्रथमम् उपज्ञातः इत्यस्मात् हेतोः एतत् "ब्रह्मगुप्त-समीकरणम्" इति व्यपदेक्ष्यते। $A=1$ कृते एतत् निम्नलिखितं रूपं बिभ्रियात्-

$$Nx^2 + 1 = y^2 \tag{2.2}$$

एतत् आधुनिकैः गणितज्ञैः 'पैल-समीकरणम्' (Pell's equation) वा फरमैट-समीकरणम् (Fermet's equation) इत्युच्यते। पैल महोदयाः 17 तम-शताब्द्याम् एतस्य भंगं दर्शितवान् इति केचित्। वस्तुतः फरमैट-महोदयैः तस्यामेव शताब्द्याम् अस्याः समस्यायाः समाधानं दत्तम्। एका समस्या तत्समकालीनस्य फैर्निकलाख्यस्य गणितज्ञस्य कृते फरमैट-महोदयैः गणित-प्रावीण्य-परीक्षार्थम् उपास्थाप्यतेति इतिहासः प्रमाणम्। डाः डिक्सनस्य अंकसिद्धान्तेतिहासः श्री टी. नागेलस्य पुस्तकं च अस्मिन् विषये अध्येतव्यम्।

वस्तुतस्तु समीकरणम् (2.2) श्री भास्कराचार्य महोदयाः

द्वादश्याः शताब्द्या आरम्भे एव पूर्णरूपेण वर्ग-प्रकृति-कुट्टकयो: उभयोरपि प्रयोगेण (चक्रवालाख्य-गणितेन) साधितवन्तः। ब्रह्मगुप्त विधौ तु वज्राभ्यास-विकासः अजायत। श्री भास्करीय - चक्रवाल - विधिस्तु अंक-सिद्धान्ते महत्वपूर्णः प्रकारो विद्यते इति जैकोबी-महोदयाः अपि एनं विधिं प्राशंसन्। विंश्याः ख्रीस्त - शताब्द्याः आरम्भे कतिपये विद्वांसः हैंकल - टैन्नेरी - जैकोबी - प्रभृतयः भारतीयानां ग्रीक - देशीयानां च एतासु गणित-शाखासु उपज्ञाः व्यवीविचन्। परम्, भारतीयानाम् उपज्ञानानि तु कतिचन न स्वीकृतवन्तः इति अन्याय्यमेतत्। पूर्वं जयदेवः दशम-शताब्द्यां तथा च श्री भास्कराचार्य-महोदयः द्वादश्यां शताब्द्यां चक्रवाल-पद्धत्या (2.2) समीकरणस्य भंगं दर्शितवन्तौ। अतः एतत् "जयदेव-भास्कर-समीकरणम्" इत्येवं व्यपदेष्टव्यम्।

वर्गप्रकृति-सिद्धान्तानां विवेचनम् अत्र उपस्थापयिष्यते। एष भौतिकी-शास्त्रे उपयोगाः अन्ये च विशिष्टाः, विचाराः, विविधाः समस्या-भंगाश्चात्र प्रदर्शयिष्यन्ते। $\sqrt{N}$ अस्य वितत - भिन्न - साधनाप्तानां भंगानां श्रेयः श्री लाग्रांज - महोदपस्य कृते मन्यते। परम् श्रीभास्करीय-पठन-पाठन-परम्परायां वल्लीप्रकारस्यैकस्य विशिष्टस्य विकासो जात इत्यत्र अग्रे प्रतिपादयिष्यते लाग्रांज-महोदयानां विधेः तुलनायाम् एते विधयः वज्राभ्यास - वल्ल्याख्याः सरलतराः इत्यग्रे स्पष्टीभविष्यति।

वर्ग-प्रकृति-पद्धत्यां वज्राभ्यास-विधिः (समास - व्यास - भावना) प्रयुज्यते। व्यापक - रूपेण भावना - प्रमेयम् एवम् उपस्थापयितुं शक्यते।

यदि A_i क्षेपाणां कृते x_i, y_i $(i = 1,2,\ldots.n)$ कनिष्ठ - ज्येष्ठ - मानानि वर्गप्रकृति - समीकरणानि (2.1) आलापयेयुः, तदा

$$\sqrt{N}x \pm y = \Pi_{i=1}^{n}(\sqrt{N}x_i \pm y_i)$$

(यत्र II संकेत-कोष्ठकान्तर्गतानां $i = 1, 2 \ldots n$ उत्थापनेन प्राप्तानां व्यञ्जकानां गुणनफलं सूचयति)। अस्य समीकरणस्य उभयोरपि पक्षयोः करणीगताकरणीगत-पदानि समीकृत्य लब्धे x, y माने अपि तदेव वर्ग-प्रकृति-समीकरणं $A_i = \Pi_i A_i$ क्षेपस्य कृते आलापयतः इति भावना - प्रमेयम् अनेन रूपेण सर्वप्रथमं मया शोधप्रबन्धे प्रत्यपाद्यत। एकस्याः प्रक्रियायाः कृते तु भावना-प्रमेयम् एवं प्रतिपादयितुं शक्यते। तथाहि

यदि (x_1, y_1, A_1) तथा च (x_2, y_2, A_2) अधोलिखितं समीकरणम् आलापयेयाताम्

$$Nx^2 + A_i = y^2 \tag{2.3}$$

अत्र प्रथमस्य समाधानस्य कृते क्षेपः $= A_1$ (i=1)

तथा च द्वितीयस्य ,, ,, ,, $= A_2$ (i=2)

तदा $Nx^2 + A_1A_2 = y^2$ समीकरणस्य कृते एकं समाधानम्

$$x = x_1y_2 \pm y_1x_2 \qquad y = Nx_1x_2 \pm y_1y_2 \tag{2.4}$$

स्यादिति। अत्र यदि धन-चिह्नं गृह्येत, तदा तु एषा प्रक्रिया समास-भावना इत्युच्यते। यदि च ऋण-चिह्नम् स्वीक्रियेत तदा च व्यास-भावना इत्येवं व्यपदिश्यते। अंकोत्पादन-सौकर्यार्थं निम्नलिखित-प्रकारेण गणितन्यासः क्रियते। एषा प्रक्रिया वज्राभ्यासः इत्येवम् अपि आख्यायते।

N

कनिष्ठः	ज्येष्ठः	क्षेपः
x_1	y_1	A_1
x_2	y_2	A_2
$x_1y_2 \pm y_1x_2$	$Nx_1x_2 \pm y_1y_2$	A_1A_2

अत्र यदि लाग्रांजीय (Lagrange's) वितत-भिन्न-विधिः प्रयुज्येत तदा $Nx^2+1=y^2$ समीकरणे अधिकतर-क्रमाणाम् $\sqrt{N}$ अस्य अभिसार्याणां (Convergents) मानानि तान्येव x, y मानानि ददति, यानि खलु वज्राभ्यास - विधिना सारल्येनैव लभ्यन्ते इति। यदि y_1/x_1 अस्य अभिसार्यस्य क्रमः $=n_1$ तथा y_2/x_2 अस्य अभिसार्यस्य क्रमः $=n_2$ तदा उपरिदर्शित - समास - व्यासभावनाभ्यां लब्धे अभिसार्ये $(n_1 \pm n_2)$ क्रमे स्तः इति सारल्येनैव उपपादयितुं शक्यते। एवं च एतत्तु-स्पष्टमेव यत् $\sqrt{N}$ अस्य सूक्ष्मतराणि सूक्ष्मतमानि मानानि अनया समास-भावनया सुसाधानि इति। यतो हि उच्चतर-क्रमाणि सूक्ष्मतराणि $\sqrt{N}$ मानानि ददति इति अत्र पाठकैः उदाहरणानि स्वयमेव कल्प्यानि इति।

यदि $Cos^2\theta = 1 - Sin^2\theta$ समीकरणम् एतत् वज्राभ्यास-पद्धत्या समाधीयेत, तदा तु प्रतिप्रक्रियं योगवियोगात्मक-कोण-ज्या-कोज्यारूपे फले लभ्येते अतः वज्राभ्यास-पद्धतिः $Sin(\theta_1 \pm \theta_2), Cos(\theta_1 \pm \theta_2)$ अनयोः माने साधयितुं प्रायुज्यत बहुभिः कमलाकर-प्रभृतिभिः गाणितिकैः।

किञ्चैतदपि बोध्यम्- यत् उपरि-प्रतिपादितस्य व्यापकस्य भावना-प्रमेयस्य साहाय्येन डी-मोइवर-प्रमेयम् (De Moiver's theorem) सूपपादम् एवेति गणितज्ञानां नातिरोहितम्। श्री वेंकटेश - केतकर - महोदयैरपि वज्राभ्यास-विधिना डी-मोइवर-प्रमेयम्

उपापाद्यत इति श्रूयते। श्री केतकर-महोदयैः का रीतिस्तत्र स्वीकृता? इति न जाने।

ख) चक्रवाल विधिः वल्ली विधिश्च

चक्रवाल-विधिस्तु श्रीभास्करीये बीज-गणिते द्रष्टव्यः। एतदर्थं मदीयः शोधप्रबन्धः इंग्लिश-भाषोपनिबद्धः विविध - विषयावगाहन - संवलितः प्रकाशितः विद्यते। अत्र तु विस्तर-भयात् अधिकाः विषयाः विचाराश्च नोपस्थाप्यन्ते। बह्व्यः विविधाः कठिनाः विलक्षणाश्च समस्याः वर्गप्रकृति-कुट्टकादि-विधया समाहिताः मत्पार्श्वे अप्रकाशिताः अपि विद्यन्ते। वज्राभ्यास-विध्यर्थमेकः भंगः अपेक्षितः स तु चक्रवाल-साहाय्येन लभ्यते, यतो हि निरीक्षा - विधया (Inspection-method) एष खलु सारल्येन न लब्धुं शक्यः इति। परम्-चक्रवाल-विधिस्तु निर्णीतः पन्थाः विद्यते। अभीष्टक्षेपे कनिष्ठ-ज्येष्ठौ लभ्येयाताम् न वा इति चक्रवाल-गणितं प्रयुञ्जानो न जानीते। परम्-भास्कर-समीकरणस्य साधानार्थं तु चक्रवाल-विधिः द्वितुल्यक्षेपे रूपतुल्यक्षेपे वा परिणामम् अवश्यमेव दद्यात् इत्यत्र नास्ति संशीति-लेशः। चक्रवाल-पद्धत्या तु सदैव अभिसायार्याणि क्रमशः एव न प्राप्यन्ते। परम् अन्ते पूर्णम् अभिसार्यं $\sqrt{N}$ कृते लप्स्यते एव। चक्रवालेन तुलनायां वर्गप्रकृतीयः वल्ली-विधिः नितराम् उपयुक्त ईषत्कर इति अत्र एनमेव विधिं विचारयामः। एतस्य विधेः विश्लषणार्थ श्री सुधाकर-द्विवेदि-महोदयैः करण-प्रकाशाख्यस्य ग्रन्थस्य टीकायाः अन्ते परिशिष्ट-रूपेण सिद्धान्तः प्रतिपादितः। निबन्ध-गौरवादत्र उदाहरणेन एकेन वर्ग-प्रकृतीयः कुट्टन-विधिः निदर्श्यते। तथाहिः—

1) भवतु $19x^2 + 1 = y^2$

अत्र $\sqrt{19}$ अस्य मौल्यम् पूर्णांकरूपम् $= 4$ (2.5)

$\therefore \sqrt{19x^2 + 1} = y = (4x + z)$ (भवतु) (2.6)

यतो हि y मानं $4x$ तः अधिकतरम् एव स्यात्, अतः $y = 4x + z$ यत्र $z = 4x$ तः अधिकः वर्गमूलांशः।

$$y^2 = 16x^2 + 8xz + z^2$$

$$x = \frac{4z + \sqrt{19z^2 - 3}}{3}$$

भाज्ये प्रथम खण्डम् $= 4z$

द्वितीय खण्डमूलं पूर्णांकरूपम् $= 4z$

$$\text{लब्धिः} = \frac{4z + 4z}{3} = 2z \quad (2.7)$$

$$\frac{4z + \sqrt{19z^2 - 3}}{3} = 2z + r \quad (2.8)$$

$$z = \frac{2r + \sqrt{19r2 + 5}}{5} = r + m = z \quad (2.9)$$

$$\therefore r = \frac{3m + \sqrt{19m^2 - 2}}{2} = 3m + n \quad (2.10)$$

$$m = \frac{3n + \sqrt{19n^2 + 5}}{5} = n + p \quad (2.11)$$

$$n = \frac{2p + \sqrt{19p^2 - 3}}{3} = 2p + S \quad (2.12)$$

$$p = 4S + \sqrt{19S^2 + 1} \quad (2.13)$$

यदि $S = 0$, तदा $p = 1$, एतत्तु स्पष्टमेव यत् अत्र वल्ली-विधया भंगः सम्भवति। एवं चात्र कुट्टने लब्धानि समीकरणानि (2.6), (2.8)...(2.13) सन्ति। एतेषां वल्ली-विधया भंगः क्रियते। तथाहिः

$$\text{ज्ये.} = 170 \qquad\qquad \text{वल्ली}\begin{cases}4\\2\\1\\3\\1\\2\\1\\0\end{cases}$$

$$\text{कनि.} = 39$$

उपरि-दर्शिते उदाहरणे वल्ली समा विद्यते। अतः रूपक्षेपे धनात्मके कनिष्ठ-ज्येष्ठे लभ्येते। यदि वल्ली विषम-पदा भवेत् तदा तु (-1) क्षेपे कनिष्ठ-ज्येष्ठे स्याताम् यतोहि-कुट्टने समीकरणेषु करणी-गत-क्षेप-मान-चिन्हं प्रथमं धनं चेत्, द्वितीय-समीकरणे कुट्टकीये ऋणं जायते, तृतीयस्मिन् एतत् पुनरपि धनं जायते........इत्येवं विषमे पदे, समे च पदे चिन्हं विपरीतं भवति, इति तु स्पष्टमेव।

व्यक्तरीत्या वल्ली इत्थम् उद्वलयितुं शक्यते। प्रथमं पूर्णांक रूपं मूलं लेख्यम्, तत्पदं स्यात्। अन्तरम्, = प्रकृतिः-(पूर्णांकरूपपदवर्गः) = हरः। पदम् = शेषः। एतान् पदशेषहरान् निम्नलिखित-रीत्या लिखेत्। यथा प्रकृतोदाहरणे

पदम्(लब्धिः)	शेषः	हरः
4	4	3

अग्रिमपद शेषहरान् लब्धुमेवं प्रक्रिया कार्या। शेष प्रथम - पदयोर्योगः कार्यः, हरेण भागे पूर्णांक रूपा लब्धिः ग्राह्या। एषा लब्धिरेव नवीनं पदं स्यात्। प्रकृतिः-(हरः X नवीनं पदम्-शेषः)^2

एतन्मानं हरभक्तं सत् नवीनः हरः लभ्यते। प्रथमः हरः X नवीनं पदम् - शेषः = नवीनः शेषः। एवं च निम्नलिखिताः पदशेषहराः लभ्यन्ते। अत्र लब्धि ग्रहणे सदैव प्रकृतेरासन्नमूल रूपं प्रथमं पदमेव ग्राह्यम्। यदि प्रकृति = 19

पदम्	4	2	1	3	1	2
शेषः	4	2	3	3	2	4
हरः	3	5	2	5	3	1

यदि N अस्य आसन्नं पूर्णांक रूपं मूलम् A_1 भवेत् (यत्र $A_1^2 \leq N$) तदा प्रथमं पदम् $= A_1 =$ प्रथमः शेषः। हारश्च प्रथमः $= N - A_1^2 = D_1$

A_1 $\qquad$ $A = R_1$ $\qquad$ $D_1 = N - A_1^2$

अग्रे च

$$A_n = \frac{A_1 + R_{n-1}}{D_{n-1}}$$ अत्र लब्धिमात्रम्, $R_n = D_{n-1} A_n = R_{n-1}$

तथा च $$D_n = \frac{N - R^2{}_n}{D_{n-1}}$$

एवं प्रक्रियया वल्ली जनयितुं शक्यते। अत्रेदम् अवधेयम्, यत् $N - R_n^2$ सदैव D_{n-1} अनेन अपवर्त्यं भविष्यति इति। अत्रैतत् स्पष्टमेव यत् पदानि (लब्धयः) स्तम्भ-रूपेण लिखितानि अन्ते $\binom{1}{0}$ वल्ली-पुच्छेन युतानि वल्ली-रूपं जनयेयुः। तथाहि-

$$\sqrt{19} \text{ —— वल्ली } \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ \binom{1}{0} \end{array} \right.$$

वल्ली पंक्ति-रूपेण अपि ईषद्-दर्शा। एवं च अध्वयोग - समस्या अपि समाहिता जायते इत्येष लाभः।

अत्रेदम् अवधेयम्-यत् कतिपयासु स्थितिषु वल्ली-पदानि प्रथम-पद-वर्जं मध्यतः विलोमरूपेण आवर्तीनि लभ्यन्ते। वस्तुतः मध्यमपदादू अग्रे केवलं द्वित्र-पद-गणनयैव वैलोम्येन आवृत्तः स्पष्टीभवति। एतासु स्थितिषु यदि वल्ली समा स्यात् तदा तु अत्र (+1) क्षेपस्य कृते एव कनिष्ठ-ज्येष्ठौ प्राप्येयाताम् इति नातिरोहितम्। वस्तुतः यदि कश्चन हारः द्वितुल्यः लभ्येत, तदापि वल्ल्युद्वलनात् विरमय्य $\binom{1}{0}$ पुच्छेन विकोच्य द्वितुल्य-क्षेपे परिणामौ लभ्येते। पुनः समासभावनया च कनिष्ठज्येष्ठमाने संसाध्य अर्धे कृते रूप-क्षेपे स्याताम् इत्यग्रे प्रतिपादित विवेचनेनापि स्पष्टी भविष्यति। एव च वल्ल्याः उद्वलने अपेक्षितः कालक्षेपः अल्पयितुं शक्यते इति बोध्यम्।

किञ्च यदि वल्ली-पदानि यत्र क्वचनापि त्यज्येरन्, तदा धनर्ण-हर-तुल्ये क्षेपे कनिष्ठ ज्येष्ठे पदे लभ्येते। वल्ल्युद्वलन -प्रक्रियया इदं तु स्पष्टमेव यत् यदि धन क्षेप-स्थाने ऋण क्षेपं गृहीत्वा प्रक्रिया प्रारप्स्यत, तदा तु अन्ते वल्ली वैषम्ये सति कुट्टनाप्त समीकरणे धन-क्षेपः अलप्स्यत। एवं चैतत् स्फुटीभवति यत् समया वल्ल्या आप्ते फले धनं क्षेपाय स्याताम् इति। किञ्च चेत् रूप तुल्य क्षेप स्थाने A तुल्य क्षेपेण प्रक्रिया प्रारप्स्यत, तदा तु A - तुल्य हार सम्बन्धिनि कुट्टनाप्त-समीकरणे $\sqrt{NS^2{}_r + A^2} = S_{r+1}$ इत्येवम् अलप्स्यत। अत्र $S_r = 0$ $S_{r+1} = 1$ वल्ली-पुच्छं स्वीकृत्य वल्ली-पदानि A-तुल्य हार पर्यन्तमेव गृहीत्वा विकोचे कृते $\pm A$ तुल्याय क्षेपाय कनिष्ठ-ज्येष्ठे लभ्येयाताम् इति। एवं च वल्लीपद-ह्रासे तत्तद्-हार तुल्य-क्षेपे

फले भवेताम् इति निश्चप्रचम्।

उदाहरणार्थम्

$$67x^2+1=y^2$$

2) अस्य समीकरणस्य कृते

पूर्णा पंक्ति वल्ली पदानि		8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 (10)
$\sqrt{67}$	शेषाः	8 7 5 2 7 7 2 5 7 8
	हाराः	3 6 7 9 2 9 7 6 3 1

सप्ततुल्य-हार-पर्यन्तं वल्ली-पदानि $\binom{1}{0}$ पुच्छेन संवलय्य विकोचे लब्धम्

अत्र वल्ली विषमा अतः $x=11$
$y=90$ एते पदे -7 क्षेपाय
विद्येते इति तु स्फुटमेव।

$$\begin{cases} 8 \\ 5 \\ 2 \\ \binom{1}{0} \end{cases} \quad \begin{matrix} y=90 \\ x=7 \end{matrix}$$

यदि वल्ली-पदानि रूप-तुल्यहाराद् अग्रे अपि जन्येरन्, तदा पदकुलकम् (Set of terms) आवर्तते। तत्र रूपहारादग्रे प्रथमं पदं तु वल्ली-प्रारम्भ-पदस्य द्विगुणमेव मानं बिभर्ति। अन्यानि पदानि तु पूर्व-तुल्यानि एवेति। यदि द्विः त्रि........कृत्वो रूप-तुल्य-हारावधि वल्ली लिखित्वा विकाचनं विधीयेत, तदा तु वज्राभ्यास-विधया प्राप्तान्येव फलानि लभ्यन्ते। तथा हि-

$$\sqrt{67} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}8\\5\\2\\1\\1\\7\\1\\1\\2\\5\\\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}8\\5\\.\\.\\.\\5\end{array}\right.\\ \left(\begin{array}{l}16\\5\\.\\.\end{array}\right.\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}8\\5\\.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}16\\5\\.\\.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}16\\5\end{array}\right.\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}$$

अत्र प्रति–कोष्ठकं पूर्णं प्रारम्भातिरिक्तं पदकुलकं संकैतैः अभिव्यक्तं यथाक्रमं समाविष्टं विद्यते इति। अत्र विकोचेन परिणामाः द्विस्त्रिः........समास–भावनाभिः प्राप्ताः परिणामा एव नेतरे इति साधयितुं शक्यते। वस्तुतः उच्चतर–क्रमाणां वल्लीनां विकोचस्य अपेक्षया समास–भावनैव सुप्रयोजा इति बोध्यम्। अतः इदं स्पष्टमेव यत् वल्ली–पद–कुलक–वृद्ध्या $\sqrt{N}$ अस्य उच्चोच्चतर – क्रमाणि अभिसार्याणि (Convergents of higher and higher orders) लभ्यन्ते, यानि खलु समास–भावनया ईषत्साधानि इति। किञ्च n कृत्वः $(n \geq 1)$ हारविशेषप्राप्त्यवधि पदकुलकं गृहीत्वा $\binom{1}{0}$ पुच्छेन सज्जीकृत्य विकोचे प्राप्त–तद्धारविशेषतुल्य क्षेप – सम्बन्धि–कनिष्ठज्येष्ठाभ्यां साकं धनर्णरूप – तुल्य – क्षेप – सम्बन्धि कनिष्ठ–ज्येष्ठयोः अन्योन्यां (n-1) कृत्वः समास – भावना– प्रक्रियया आप्ते धनर्ण तद्धार तुल्य क्षेप सम्बन्धिनी एव कनिष्ठ – ज्येष्ठपदे प्राप्येयाताम् इति नातिरोहितं गणितविदाम्।

3) तथा हि—

$$13x^2 + 1 = y^2 \quad \text{कृते}$$

$$\sqrt{13} \rightarrow \begin{cases} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{matrix} x = 38 \\ y = 137 \end{matrix} \right\} \qquad (-3 \ \text{क्षेपे})$$

$$\begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases} \qquad \text{हारः} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

यदि क्वचन हारः 2 तुल्यः लभ्येत, तदा तत्रैव वल्ल्युद्वलनाद् विरन्तव्यम्। $\binom{1}{0}$ पुच्छेन संवलय्य विकोच्य ± 2 क्षेपे कनिष्ठ–ज्येष्ठे स्याताम्। अनयोः आभ्यामेव सह समास–भावनया प्राप्ते + 4 क्षेप–समबन्धिनी कनिष्ठ–ज्येष्ठे अर्धिते सती रूपक्षेपे स्यातामिति स्पष्टमेव। एष विधिः सरलतरः।

एतत्तु स्पष्टमेव यत् यदि क्षेपः $= A$ केनचन हारेण, उद्वलने प्राप्तानां हाराणां वा गुणन–फलेन अथवा येन केनापि वर्गेण गुणितः हार–विशेष एव वा भवेत्, तदा $Nx^2 + A = y^2$ अस्य भंगः सम्भवति। किञ्च वल्ल्युद्वलने प्रारम्भे एव आसन्न–मूलातिरिक्तं मूलम् अपि ग्रहीतुं शक्यम्–एवं च अन्ये हाराः लभ्येरन्। अतः अन्येषु A मानेषु भंगाः सम्भवन्ति इति

बोध्यम्। कतिपयासु स्थितिषु अन्तिमांक-विचारेणापि अस्य समीकरणस्य भंगस्य असम्भविता (खिलता) सुसाधा भवति। यतो हि वर्गाणाम् अतिन्माः अंकाः $1, 4, 9, 6, 5, 0$ एव सम्भवन्ति नान्ये। अस्य समीकरणस्य भंगानां सम्भवितादि-विषये विस्तरभयाद् अधिकम् अविमृश्यैव विरमामः।

ग) समस्याः, विविधाः विचाराश्च

4) कुट्टयत वर्ग-प्रकृतीयं समीकरणम् $ax^2+bx+y^2 = c$ वल्ल्युद्वलनार्थम्। तथा चैतत् विचार्यम्-यत् केषां a, b, c मानानां कृते भंगः सम्भवति?

5) यदि $\left(25C^2 + 25C + 4\right) x^2 + A = y^2$ यत्र $C=$ पूर्णांकः।

[संकेतः, $N = \left[(5C + 2)^2 + 5C\right]$ भवतु $y = 5C + 2 + z.$

यदि $C \geq 0,$ तदा

		वल्ली
		$5C+2$
	हारः $5C$	2
	हारः 9	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 2, y = 10C + 6, A = 9$

$A = -9$ कृते भंगाः केषांचन C मानानां धनर्णात्मकानां कृते सम्भवन्ति वा न वा? इति विमृश्याताम्।

6) साध्यम् यत् $5x^2 + 3 = y^2$ अस्य वर्गप्रकृति-समीकरणस्य मूलानि न सन्ति इति।

7) $(B + 1)^2 x^2 + A = y^2$ अस्य भंगः कार्यः यदि $A=B$ वा 5

8) $x^2(9C^4 + 5C^2 + 1) - 1 = y^2$ अस्य x, y समाधानार्थं भंगः C पदैः कार्यः।

9) यत् किञ्चनापि द्विघातीयं समीकरणं चलंद्वय - संवलितं

वर्गप्रकृति - समीकरणं न भवति इति। तथा हि $ax^2 + by^2 + cxy + d = 0$ अस्य भंगः सर्वदा न सम्भवति इति बोध्यम् । एतत् समीकरणम्, गोलकृतिं शंकु-कृत्तिं वा अभिव्यनक्ति इति बोध्यम्।

10) x, y, z इत्येतेषां चलानाम् अकरणी - प्रकृतिकानि धनात्मकानि पूर्णांकापूर्णांक - रूपाणि मानानि साध्यन्ताम्। यदि

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0 \\ 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

अत्र प्रथमं समीकरणं गोलम्, द्वितीयं च शंकुमेकम् अभिव्यनक्ति। अनयोः ये केचनापि कृत्तिबिन्दवः मापेलिमानि नियामकानि बिभ्रति, ते सर्वेऽपि वर्ग-प्रकृत्यादि-साहाय्येन ज्ञातव्याः। अकरणी -मानानि मापेलिमानि, प्रथमं तदर्थं विविध-प्रकाराः माप-दण्डाः अपेक्ष्येरन्। करणी-मानानि तु पूर्णतया माप्यानि न भवन्ति इति श्री कमलाकर-प्रभृतयः सिद्धान्ततत्त्व-विवेकादिषु ग्रन्थेषु प्रत्यपादयन्नेव।

11) एकस्य गोलस्य माप्य-नियामकाः स्पर्श-बिन्दवः साध्याः यदि गोलकेन्द्रमेव नियामकमूल-बिन्दुः भवेत्।

12) यदि

$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ गोलः तथा च

$x^2 + y^2 + z^2 - 24xy - 18x - 40z + 225 = 0$ कृत्तिशंकुः अस्ति। एते अन्योन्यां बाह्यतया स्पृशतः। अतः तत्र एक एव साधारणो बिन्दुः वर्तते। एवं च इमे समीकरणे एकमेव मूल्यं दास्यतः इति विमृश्यताम्।

13) भंगः कार्यः $z^2 + y^2 + z^2 = s^2$

निरीक्षणेन $x = 4k, \quad y = 3k, \quad s = 13k$

अथवा भवतु

$$y^2 + z^2 = n^2$$

$$\therefore y = 4k, z = 3k, n = 5k.$$

$\therefore n^2 + x^2 = s^2$

$\therefore x = 3a$

$n = 4a$

$n = 5k = 4a = 20c, k = 4c, a = 5c$

$x = 15c,$

वा $x = 20c, y = 12c, z = 9c, s = 25c.$

अथवा $x^2 + A = s^2$ यत्र $A = y^2 + z^2$

$$x = \left\{\frac{A/C - C}{2}\right\} = \frac{y^2 + z^2 - C^2}{2C}$$ **(इष्ट भक्तो द्विधा क्षेपः इति भास्करीय-सूत्रेण)**

भवतु $x = 2c, y = c, z = 2c, s = 3c.$

अथवा भवतु $y = 2c, z = c(2c+1) \therefore x = 2c(c^2 + c + 1)$

$$s = c(2c^2 + 2c + 3)$$

14) बहु-विमाक-भुजकर्ण-प्रमेयम्-(व्यापकीकृतं शुल्ब-प्रमेयम्)

$\sum_i x_i^2 = s^2$ अत्र पूर्णांक-रूपाणि मानानि साध्यानि।

विमा-द्वयार्थम् $x_1 = \quad x = 4, \quad s = 5$

विमा-त्रयार्थम् $x_3 = \dfrac{5^2 - 1}{2} = 12$ (इष्ट भक्तो द्विधा क्षेपः इति भास्करीय-सूत्रेण)

$$s = \frac{5^2 + 1}{2} = 13$$

विमा-चतुष्टयाय $x_4 = \dfrac{13^2 - 1}{2} = 84, s = 85$

विमा-पंचकाय $x_5 = \dfrac{85^2 - 1}{2} = 3612{,}5 = 3613.$

एवमेव अग्रेऽपि भंगाः सुलभाः।

15) प्रखण्ड-बिन्दु-ज्यामित्याः (Geometry of descret points) विकासः सुकरः। एषा खलु क्वांन्तम-ज्यामितिः (Quantum Geometry) इत्येमपि व्यपदेष्टुं शक्यते। अत्रैका समस्या दीयते। यदि $n_1^2 + n^2{}_2 + \ldots n_5^2 = n$ तदा $n = 13$ कृते विजनितता साध्या।

16) यदि $x^2 + y^2 + z^2 = n$

तदा विचार्यम्-यत् सर्वेषां n मानानां पूर्णांक-रूपाणां कृते पूर्णांकरूपाणि x, y, z मानानि विद्यन्ते न वा? इति।

17) अभिसन्धीयताम् $x^2 + y^2 = z^2$

$x = 2ab \quad y = a^2 - b^2, z = a^2 + b^2$

भवतु क्षेपः $= y^2 = (a^2 - b^2)^2$ वज्राभ्यासेन $(a^2 - b^2)^4$ $(a^2 - b^2)^6, (a^2 - b^2)^8$..... इत्यादिषु क्षेपेषु मानानि सुसाधान्येव।

18) भंगः कार्यः $x^2 + y^2 = rz^2$

भवतु $y = xk \quad z = px$

$\therefore k = \sqrt{rp^2 - 1} \quad r =$ वर्गयोगः $= n2 + 1$

(भवतु) यदि $p = 1$, तदा $k = n$ द्विः सजातीय-वज्राभ्यासेन $p = (4n^2 + 1), k = 4n^3 + 3n$ क्षेपः $= -1$, अतः

$p = 4n^2 + 1, z = (4n^2 + 1)(n^2 + 1), y = (4n + 3)(n^2 + 1)n,$

वज्राभ्यासः अन्यान्यपि प्रपञ्चितानि व्यञ्जकानि दातुं प्रभवति।

19) यदि अपूर्णा वल्ली ज्ञाता स्यात् तदा हारः गुणश्च मूलसमीकरण-गतः ज्ञातुं न शक्यते। केवलं वल्लीं जनयन्तौ विशिष्टौ हार-गुणावेव सुसाधौ। पूर्णायाः वल्ल्याः आवर्त-प्रकृत्या मूल-समीकरणं तु सुसाधमेव। वर्गप्रकृतीय-वल्ली-पदैः वर्गप्रकृति - समीकरण - तुल्य कुट्टकीय समीकरणमपि ज्ञातुं शक्यम्।

20) यदि $nx^2 + A = y^2$ तथा च $nA =$ एकः वर्गः $= K^2$ तदा समस्या–समाधानं सुशकम्। तथ हि–

$$nx^2 + A = y^2$$

$$K^2x^2 + A^2 = y^2A$$

भवतु $x = Ap, y = Ar \therefore K^2A^2p^2 + A^2 = A^3r^2$

$$K^2p^2 + 1 = Ar^2 \therefore Kp = \sqrt{Ar^2 - 1}$$

$\therefore$ अत्र यदि $A =$ पूर्णांक–वर्गयोः योगरूपः तदैव भंगः सम्भवति इत्येव समाधानं लभ्यते। किञ्च एतद् बोध्यम् यत् x मानं तथा भिन्नरूपमपि स्यात् इति।

21) यदि $20x^2 + 5 = y^2$ तदा भवतु $y = 5z$

$\therefore 4x^2 + 1 = 5z^2 \therefore 2x = k = \sqrt{5z^2 - 1}$

$k = 2, z = 1, x = 1, y = 5$

रूपक्षेपे कनिष्ठ–ज्येष्ठे लब्ध्वा वज्राभ्यासेन अन्यानि मानानि लभ्येरन् इति तु स्पष्टमेव।

22) भंगः कार्यः वर्ग–प्रकृति–सिद्धान्तैः

$x^2 + (-3)^n = z^2$

एककृत्वः वज्राभ्यासेन $\left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ \hline 4 & 5 & 9 \end{array} \right.$

पुनः पुनः वज्राभ्यासेन n अस्य कस्यचनापि मानस्य कृते भंगः सुकरः।

23) दर्श्यताम्-यत् "इष्टभक्तो द्विघा क्षेपः" इत्यनेन सूत्रेण लब्धे ज्येष्ठ-कनिष्ठ-पदे अभाव्ये मूले (भावनाभिः अगम्ये मूले) स्तः इति। इष्ट-प्राचल-परिवर्तेन भिन्न-रूपाणि वा पूर्णांक-रूपाणि मानानि लभ्यन्ते, यानि खलु प्रायशः भावनाभिर्न साध्यानि इति।

24) $nx^2 + A = y^2$ यत्र $nA =$ एकः पूर्णः वर्गः। अस्य समीकरणस्य सहायकं समीकरणम् (Auxiliary equation) भस्करीयं समीकरणम् $AX^2 + 1 = Y^2$ अस्ति। अनयोः मूलानां समास - व्यास - भावानाभिः अन्यानि मूलानि सुसाधानि इति।

25) यदि (न) प्रश्ने $nA =$ एकः पूर्ण वर्गः, तदा भवतु

$$nA = k^2$$

$$nx^2 + 1 = y^2$$

$$nAx^2 + A = y^2 A$$

$$k^2x^2 + A = y^2 A \qquad kx = \sqrt{A(y^2 - 1)}$$

अत्र चेत् $y^2 - 1 = Az^2$ तदा $kx = Az$

$\therefore x = \dfrac{Az}{k}$ इत्येवं भिन्नात्मकं कनिष्ठं लब्धम्

26) अधो-लिखितस्य वर्गप्रकृति-समीकरणस्य चक्रवाल-रीत्या भंग-विधौ जनितानां हार-गुण-क्षेपादीनां सारणीं प्रस्तूय वल्ली-समुद्वलने जनितया हार-शेष-पद-सारण्या तुलना कार्या।

$$22x^2 + 1 = y^2$$

वल्ली-विधिः, चक्रवालविधेः विकसितं रूपम् इति अत्र कीदृशी मतिरस्ति भवतः?

27) $x^2 + y^2 = z^2$ अत्रास्मिन् सममित-समीकरणे (4, 3, 5) मौल्यांकानि प्रारम्भिकाणि स्वीकृत्य कनिष्ठं क्षेपमूलं च परस्परां

विनिमीय द्विधा वज्राभ्यासः कार्यः परिणामाश्च तुलना-दृष्ट्या विमृश्याः ।

4	5	3^2
4	5	3^2
40	41	9^2

अथवा

$$40^2 + 9^2 = 41^2$$

3	5	4^2
3	5	4^2
30	34	4^4

$$30^2 + 16^2 = 34^2$$

अत्रेदमवधेयम् यत्–उपयोरप्यनयोः भाव्य–मूल–श्रेण्योः पन्थानौ भिन्नौ विद्येते।

28) भंगः कार्यः

$$\left[b^2 + \frac{1}{b^2}\right]x^2 + 1 = y^2$$

b	b^2	-1	
b	b^2	-1	
$2b^3$	$2b^4 + 1$	1	इत्यादयः

29) $17x^2 + 1 = y^2$ अत्र आसन्न–मूलम् प्रकृतितः अधिकं गृहीत्वापि कार्यं सिद्धयति इति दर्श्यताम्। तथाहि

5	5	-8	y = 4
-1	3	-1	x = 1
$\binom{1}{0}$			क्षेपः = -1

अत्र वल्ली-पदानि, समानि परम् ऋण-चिन्हं पदेषु लभ्यते अतः वल्ल्याः समत्वेऽपि ऋण-क्षेपे कनिष्ठ-ज्येष्ठे लब्धे। कुट्टकेऽपि ऋणवल्ल्याः प्रयोगे सम वल्ली-विकोचे ऋणक्षेपे फले लभ्येते इत्येवं ऋणवल्ली अपि व्यवस्थापयितुं शक्या। आसन्नाधिक - मूल - ग्रहणे वल्ली-विधेः विकासः सुशकः।

30) वज्राभ्यास साहाय्येन वर्गकरणीनामासन्नतराणि (Approximate) आसन्नतमानि मानानि सारल्येनैव भिन्नात्मकरूपैः सुसाधानि इति बोध्यम्। उदाहरणार्थम् $5x^2+1=y^2$

$$\text{अत्र} \quad \sqrt{5}=\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \therefore \sqrt{5}\simeq y/x \quad \text{(स्वल्पान्तरेण)}$$

अतः वल्लीविधया $\sqrt{5}-9/4$, सजातीय-वज्राभ्यासेन च $\sqrt{5}-\frac{161}{72}$ एतत् मानम् आसन्नतरं विद्यते। यदि अन्यानि उच्चतर-क्रमाणि अभिसार्याणि गृह्येरन् तदा मूलम् सूक्ष्मतरं स्यादिति तु स्पष्टमेव। किञ्च अन्यहार (क्षेप)-पर्यन्तम् अभिसार्याणि अपि स्थूलानि मानानि दद्युरेवेति विरमामः। चक्रवाल-विधौ अन्येऽपि क्षेपाः लभ्यन्ते। अस्य विधेः विकासोऽपेक्षितः। चक्रवाल - विधितः वल्ली-विधेः प्रादुर्भावोऽपि दर्शयितुं शक्य इति तु स्पष्टमेव।

31) $x^4+y^4=z^4$ अस्य भंगः सम्भवति न वा?

यदि $x^2+y^4=z^2$ तदा तु $x=4ab(a^2+b^2)$

$y=(a^2-b^2), z=(a^2+b^2)^2+4a^2b^2$

यदि $(a^2+b^2)^2+4a^2b^2=k^2$

तथा च $4ab(a^2+b^2)=s^2$ तदा उपर्युक्तस्य समीकरणस्म

$$x^4 + y^4 = z^4$$ इत्यस्य भंगः सम्भवति।

भवतु $a^2 + b^2 = r, \quad ab = p \quad \therefore r^2 + 4p^2 = k^2$

तथा $4pr = s^2$

भवतु $s = 2rm$

$$\therefore p = \frac{4r^2m^2}{4r} = rm^2$$

$\therefore r^2 + 4r^2m^4 = k^2$ भवतु $k = rt$

$\therefore t^2 - 1 = 4m^4$

अत्र केवलम् एक एव भंगः $m = o, k = r$

$\therefore p = o = ab$ भवतु $a = o, s = o$ एष भंगस्तु तुच्छ एव। अतः अस्य समीकरणस्य भंगो न विद्यते इति। एष प्रमाण - विधिस्तु न व्यापक इति अवधेयम्।

32) यदि g कस्याश्चन रूढ़-संख्यायाः द्विगुणेन मानेन तुल्यं स्यात् तदा एतत् कयोश्चन वर्गयोः अन्तर-रूपेण अभिव्यक्तुं न शक्यते इति साधय। (लाग्रांज-प्रमेयमेकम् एतत्)

33) "रूपशुद्धौ खिलोद्दिष्टम् वर्गयोगो गुणो न चेत्" इत्यस्य भास्करीय-प्रमेयस्य उपपत्त्यर्थम् Davenport इत्याख्यस्य विदुषः Higher Arithmatic द्रष्टव्यम्। Deron Pale इत्याख्येन विदुषा अपि स्व-ग्रन्थे साधितम् यत् $Nx^2 - 1 = y^2$ तदैव स्यात् यदि $y^2 + 1 = 0(ModN)$ अस्य भंगः सम्भवेत्। एतदर्थम् N मानम् पूर्णांक-वर्गद्वय-रूपेण अभिव्यञ्जनीयतया आपद्यते। परम् एतद् अवधेयम् यत् एषः निर्णायकस्तु अवश्यालाप्यः, परम् पर्याप्तो न। उदाहरण- रूपेण $N = 34 = 25 + 9$, परम् अस्य मानस्य कृते ऋणरूपक्षेपे भंगो न सम्भवति इति। N तु तदा वर्ग-द्वय-योग-रूपेण

अभिव्यञ्जेलिमं न भवितृ यदा N अस्य किञ्चन $(4k+3)$ रूपमावहत् दृढं गुणनखण्डं स्यात्, वा 2 एषा संख्या N मानम् समांक-रूपं फलं ददत् सद् विभजेत् इति। अतः $56 = 7 \times 2^3$ तथाच $99 = 3^2 \times 11$ एते वर्ग-द्वय-योगरूपेण अभिव्यंक्तुं न शक्येते इति।

"बर्टन डब्ल्यू जोन" इत्याख्यस्य विदुषः आसिटीन ओराख्यस्य च विदुषः अंक-सिद्धान्त-पुस्तकेषु ब्रह्मगुप्तादीनां भारतीयानां गाणितिकानाम् अपि सिद्धान्ताः विमृष्टाः।

34) यदि $(a^{2k} \pm 2)x^2 + 1 = y^2$ तदा साध्यम्

$$(a^{2k} \pm 2)\left[2a^k(a^{2k} \pm 1)\right]^2 + 1 = \left[2a^{2k}\left\{a^{2k} \pm 2\right\} + 1\right]^2$$

घ) नाभिक-भौतिक्याम् उपयोगाः

कुट्टक प्रयोगेण कतिपय-चल-क्वान्तमांक-प्रथमघातीय - समीकरणानां संभवि - भंग भेद - संख्या साध्यते। एतानि च समीकरणानि अनिर्णीत-रूपाणि क्वान्तमनिरोधात्मकान्येव (Quantum Constraints) इमानि खलु समीकरणानि सरलान्येव अतः साधारण्येन एतेषां भंगार्थ विशिष्टा कुट्टन-पद्धतिः नापेक्षिता। यदि च समस्या बहु-कण-विमा-सम्बन्धिनी विविधावस्था-विजनिततया विशिष्टा भवेत्, तदा कुट्टक - समीकरणानि विविध - रूपाणि प्राप्येरन् इत्यवधेयम्। एवं चैतत् स्पष्टम्-यत् प्रथम-घातीयानि अनिर्णीत - समीकरणानि क्वान्तम-निरोधात्मकानि कुलके अवस्था - तरंगाणां संख्यां तेषामाकृतीश्च अभिव्यञ्जयन्ति इति। किञ्च एतानि कदाचन विशिष्टानां तरंगाणां प्रभावाधिक्यम् अपि सूचयन्ति। तथा हि विषम-प्रोटोनकानां विषम-न्यूट्रोनकानां च नाभिकानां कृते डैवीडोव - फिलिप्पोवीय - प्रतिरूपकस्य

व्यापकी- करणेन अवस्था-फलनम् अधस्तात् लिखितुं शक्यते-

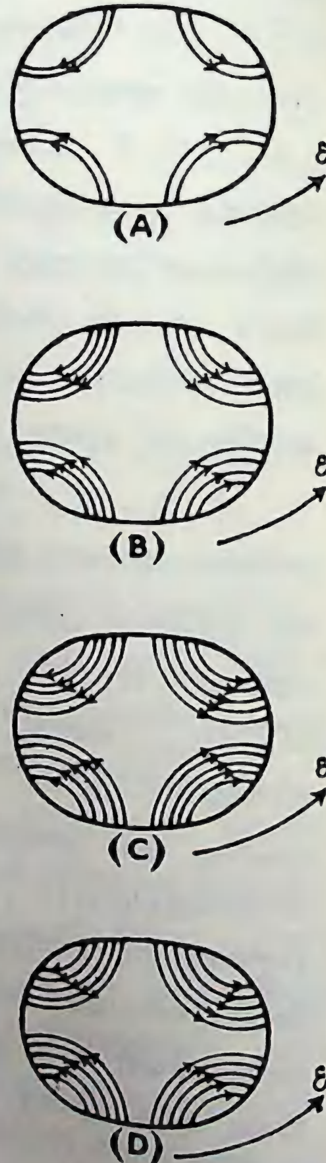
$$\psi = \Sigma A^{(I)} \left[D^{I}_{MK} X_{j_p \Omega_p} X_{j_n \Omega_n} + (-1)^{I-j_p-j_n} D^{I}_{M-K} X_{j_p -\Omega_p} X_{j_n -\Omega_n} \right]$$

अत्र योगाः $\sum$ तु अवस्थायां प्राप्यानां सर्वेषां $j_p, \Omega_p, j_n, \Omega_n, K$ मानानां कृते विद्यन्ते D^{I}_{MK} तु भ्रमिकस्यावस्था -फलनानि D आव्यूह-रूपाणि सन्ति। X- फलनानि तु प्रोटोन -न्यूट्रोनावस्थाः प्रकटयन्ति इति। नियामक - कुलकस्याक्षाणामन्याभिः विधाभिः परिवर्तित-संकेतैः द्योतनेन अवस्था-फलने न परिवर्तेते अतः अनेन निरोधेन निम्नलिखितं क्वान्तम-समीकरणम् अनीर्णीत-रूपं लभ्यते। तथा हि

$K - \Omega_p - \Omega_r =$ एकः समः अङ्कः $= 2N$ (भवतु)

सममितस्य नाभिकस्य कृते तु $N = 0$ अतः $K = \left| \Omega_p \pm \Omega_n \right|$ यदि कस्मिंश्चन अवस्था-कुलके न्यूक्लियोनानां कोणीय-संवेग -प्रक्षेपयोः Ω_p, Ω_n इत्येवं संकेतितयोः अधिकतमे माने $\Omega_{p\max} \Omega_{n\max}$ भवेताम्, तदा $K_m = \Omega_{p\max} + \Omega_{n\max} = I_m$ एषः कोणीयसंवेगः-संकेतकः सुचारुः क्वान्तमांक (good quantum number) इव आचरति। $|I>, (I \geq I_m$ अवस्थाः भ्रमिकीयां प्रकृतिमावक्ष्यन्ति। $I \leq I_m$ अवस्थानां कृते च कणानां (न्युल्कियोनानाम्) स्पैक्ट्रमीयं वितरणम् (Contribution) अधिकं विद्यते। यथैव संवेगः वर्धते, नाभिकस्य पृष्ठतले अधिकाधिकाः तरंगाः जन्यन्ते, अन्ते तु $I = I_m$ संवेग-स्थितौ तरंगाणां संख्या स्थिरा जायते तदनन्तरं च नाभिकीयं वितरणम् अधिकम् इति विवेकः।

एषैव स्थितिः चित्रेषु (A) (B) (C) (D) संकेतितेषु दर्शिता। अत्र ε दिष्टस्य मानं कोणीयं संवेगं सूचयति। (C) (D) चित्रयोः तरंगसंख्या एकैव इति तत्र भ्रमिकीया प्रकृतिः प्रभावशालिनी स्यात् इत्याशास्यते। एतादृक्षाः भ्रमि-बन्धाः (Rotational Bands) अधिक - संख्याक-न्युक्लीयोनीयावस्था - कुलक- पत्तने जनिताः सन्ति इति विशिष्टता एषाम्। साधारण्येन भ्रमि-बन्धाः एकैक -न्यल्कियोनावस्था-विशिष्टे पत्तने एव जनिताः जायन्ते इति बोध्यम्। एवं चैतत् स्पष्टम्-यत् क्वान्तमांकानां सुचारुता (good ness) तरगिकाणां संख्या, अवस्थाकृतयश्च प्रथम-घातीयानिर्णीत - समीकरणगत-क्वान्तमांक - प्रकृत्यैव निर्धारिताः जायन्ते इति।



एवमेव क्वान्तमांकेषु द्विघाती -यानिर्णीत-समीकरणानि, अपि च उच्चतर-घातीयानिर्णीत-समीकरणानि विशिष्टानां क्वान्तम-यान्त्रिकीय-घटनानां नियमान् वा तत्सम्बद्धाः अवस्थाः द्योतयेयुरिति मन्ये। बह्वीषु

स्थितिषु च कोणीय-संवेग-सिद्धान्ते क्लैब्शगॉर्डन गुणकादि-शून्यत्वे वर्ग-प्रकृति-सिद्धान्ताः नियमितताया: (Systematics) अध्ययनार्थं प्रयोक्तुं शक्यन्ते। एतत् साधयितुं शक्यते-यत्

33) $$\left| C^{\,l_1\ \ l_2\ \ l_3}_{K_1 K_2 K_3} \right|^2 = p/q \quad (l_2 = L)$$ यत्र $p \leq q$ पूर्णांकौ स्तः

एकं L- घातीयम् अनिर्णीत-समीकरणं विद्यते। एषां कतिपयानि समीकरणानि वर्गप्रकृति-साहाय्येनापि साधयितुं शक्यन्ते। तथा हि कस्यचन नाभिकस्य K- शीर्षोपनिबद्धस्य भ्रमि - बन्धस्य कस्यांचन सदस्यावस्थायां वैद्युतस्य चतुर्ध्रुवीय-धूर्ण-प्रकारकस्य आईगन - मौल्यानां कृते विगनर - एक्कार्ट - प्रमेय - साहाय्येन अधोलिखितं व्यञ्जकं लभ्यते-

$$Q\ (I,K) = C^{\,I\ 2\ I}_{K\ 0\ K}\, Q_0$$

यत्र अवस्था $|IK>$ कृते वैद्युतः चतुर्ध्रुवः घूर्णः = Q (I, K) तथा च आभ्यन्तरः च.ध्रु.घूर्णः = Qo एष खलु नाभिकीय-कोषिकायाः (core) वैलेंस-न्यूक्लियोनानां च स्व-स्वकानां चतुर्धूव-घूर्णानां योग-रूप एव। अत्र यदि Q (I,K) = 0

$$C^{\,I\ 2\ I}_{K\ 0\ K} = 0$$

अर्थात् $$I(I+1) - 3K^2 = 0$$

एतत् वर्गप्रकृति-समीकरणमेव। एतत् साधितं सत् $K=1$ $=0, 1/2$ तथा च $K=2, I=3, K=15/2, I=25/2,$ तथा च K $=28, I=48$ इत्यादिकाः अवस्थाः लम्भयति। चुम्बकीय - अष्टध्रुव - घूर्णस्य कृते च -

$$5K^2 - 31(1+1) + 1 = 0$$

अस्य समीकरणस्य मौल्यानि समास - व्यासभावना - साहाय्येन सुसाधान्येव। अत्र त्ववस्थाः $| IK >= | 00 >, | \frac{1}{2} > \frac{1}{2} >$

$\frac{1}{2}>,|11>,|65>,|21/2,17/2>$ एव भौतिकीशास्त्रज्ञानां कृते उपयुक्ताः अवस्थाः लभ्यन्ते। षोडश - ध्रवीय - धूर्णस्य कृते

च- $105K^4-7\{3l^2(1+1)^2-1(1+1)\}$
$$-5\{6l(l+1)-5\}\{3K^2-l(l+1)\}=0$$

अस्य भंगः अधस्तात् दर्श्यते तथा हि यदि $R=I(I+1)$ इत्यनेन निरसने कृते K^2 वर्ग–समीकरणं संसाध्य लब्धम्-

$$K^2=\frac{5(6R-5)+\sqrt{480R^2-660R+625}}{70}$$

(केवलं धन–चिह्नमेव गृहीत्वा) अत्र करणीगतं पदं वर्गेण समीकृत्य $480\,R^2-660\,R+625=y^2$ (भवतु)

$$\therefore R=330+\frac{\sqrt{480y^2-191100}}{480}$$

भवतु $y=10\,t$

$$R=33+\frac{\sqrt{480t^2-1911}}{48}$$

यदि $480t^2-1911=m^2$

अस्य अभाव्यानि मूलानि त्रीणि $I=K$ सम्बन्धिनि $t=2$, 5/2; 7/2 सन्ति एव। अत्र सहायकं भास्कर–समीकरणं चैतदस्ति-

$$480T^2+1=M^2$$

एतस्य भंगार्थ वल्ली उद्धलिता •

21,	241	=M	वल्ली आंकुचिता
1	11	T	M,T माने साधयति।
9			
1			

$\binom{1}{0}$ वल्ली–पुच्छम्

अथवा क्षेपः $=4$ कृते $T=1, M=22$ अतः समास-भावनया m, t मानं रूपक्षेपे सुसाधे। $t=5/2$ कृते $m=33$ $(K=1=0,$ $Y=25)$ अत्र व्यास भावनार्थ न्यासः

5/2	33	-1911
11	241	1
519/2	5247	-1911

$$\therefore R=\frac{5247+33}{48}=110=1(l+1)\therefore l=10$$

$$\therefore K^2=81 \qquad \therefore K=9$$

अतः K=9, I=10 कृते षोडश ध्रुवीय-धूर्णमानं शून्यं स्यदिति सिद्धम्। अत्रैतत् साधयितुं शक्यते यत् अर्धरूप-क्वान्तमाङ्कावस्था-रूपाणि मूलानि अस्य समीकरणस्य न विद्यन्ते इति। अतः विषम A नाभिकानां कृते षोडशध्रुवीय-घूर्णमानं भ्रमिबन्ध-शीर्षातिरिक्तासु अवस्थासु न कदापि शून्यायते इति सिद्धम्।

35) किञ्च "रूपशुद्धौ खिलोद्दिष्टं वर्गयोगो गुणो न चेतु" इत्यस्य प्रमेयस्य उपयोगेन कतिपयानां राका-गुणकानां शून्यत्वेन लब्धानां समीकरणानां भंगाः विवेचयितुं शक्याः। रोजाख्यस्य विदुषः कोणीय-संवेग-सम्बन्धिनि पुस्तके 226 तमे पृष्ठे $A=J_1(J_1+1)-J(J+1)-L(L+1)$ पदैः राका-गुणकं-सूत्रं साधित विद्यते। यदि $J=L$ तदा $(2J_1+1)^2=2(2L+1)^2-1$. अतः अस्य साहाय्येन एतत् सुसाधम् यत् $W(2222, 03)=0$ तथा च $W(14,14,14,14,0,20)=0$, यत्र W तु राका-गुणकं *(Racah coefficient)* विद्यते इति। एवं चैतत् स्पष्टमेव यत् $\nu_1\nu_2\ldots\nu_n$

क्वान्तकांकैः $f(v_1 v_2 \ldots v_n) = 0$ बीजगणितीयम् (किं वा अबीजीयम्) समीकरणं क्वान्तम-निरोध-रूपं विशिष्टं महत्त्वं बिभर्ति अत्रोपरि-विविक्तानां क्वान्तमाक-निरोधानां साहाय्येन नाभिकीय-घूर्णावस्थान्तरणादिकानां नाभिकस्य स्थैतिक-गातिक-गुणानाम् अध्ययन सम्भवति। अत्रदेम् अवधेयम् यत् अष्ट - षोडश - ध्रुवजन्येषु अवस्थान्तरणेषु $|IK> \rightarrow |I'K'>$ (विशिष्टानां IK माननां कृते) मानानि शून्यायन्ते अपि। एतेषां शून्यता तु कोणीय संवेग-तत्प्रक्षेपयोः अन्योन्य-ताररम्येनैव जन्यते न तु कोणीयसंवेग-संरक्षण-राद्धान्तेन वा गामादिकोर्जावाहक-माध्यमस्य कोणीय-संवेग-लाभापेक्षया इति एते खलु विशिष्टाः अवस्थान्तरण-चयन-नियमाः सन्ति इति विशेषेण प्रतिपाद्यम्। एष विषयो लेखकेन सर्वप्रथमं देहली-विश्वविद्यालये गामा -अवस्थान्तरण-विषयिणि अन्ताराष्ट्रिय-सम्मेलने अमेरिका आस्ट्रेलियादि- विविधदेशागत- विद्धत्- परिषदि 1974 रव्रीस्ताब्दस्य नवम्बरमासे शोध-प्रबन्ध-रूपेण उपन्यास्यत इति।

घनावस्था-भौतिकी शास्त्रेऽपि आसां पद्धतीनाम् उपयोगः ईषत्करः इत्यपि लेखकेन मैटसाईंस-संस्थायोजितसभायाम् अमेरिका-फ्रांसादिदेशेषु च भाषणेषु निदर्शितम्। लेजेण्ड्रे-बैस्सलादि-फलनानां क्रमोपचयापचय-सम्बन्धाः (Recursion Relations) वल्ली-समीकरण -रूपाः अतः तत्रापि बहवः प्रयोगाः ईषत्कराः।

36) बैसल फलनानाम् $J_n(x)$ विभिन्नकोटिकानां सम्बन्धस्तु निम्नलिखितः-

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

अस्य उपयोगं विधाय वल्ली-पद्धत्या असकृत्कर्म प्रक्रियाभिः

बैसल फलनानाम् उद्वलनं विधेयम्। विशिष्टाय x–मानाय, $n=1/2$ कोटिकं फलनं पुच्छत्वेन स्वीकृत्य $J_{5/2}(x)$ मानम् उद्वलनीयम्।

37) किञ्च $J'_n(x)=\dfrac{dJ_n(x)}{dx}$ अवकल गुणकस्य कृतेऽपि एतादृक्षः वल्ली–सम्बन्धः गाणितिकैः साधितः। तम् अवलम्ब्यापि वल्ली–विधया अवकल–गुणकस्य प्रकृतिः विवेचनीया।

38) अन्येषां लैजेण्ड्रे–प्रभृति–भौतिकीय–फलनानां कृतेऽपि वल्ली सम्बन्धाः सिध्यन्ति तेषां प्रयोगैः फलनानि सुखेन उद्वलेलिमानि इति अत्र विस्तरभयाद् विरम्यते। अधीयानाः अत्र स्वयं प्रयतन्ताम् इति।

38) वज्राभ्यास प्रक्रियायाः कृते प्रकारकम् $\begin{pmatrix} Nx_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ तथाहि; कनिष्ठ–ज्येष्ठ–क्षेप–संकेतैः

$$\begin{pmatrix} Nx_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}_{A_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}_{A_2} = \begin{pmatrix} Nx_1x_2 + y_1y_2 \\ y_1x_2 + y_2x_1 \end{pmatrix}_{A_1A_2}$$

एवं वज्राभ्यास–वल्ली–प्रकारकम् अपि परिभाषयितुं शक्यम् विशेष विवेचनार्थम् मम पुस्तकम्।

"Indian Mathematics, advancements and applications" द्रष्टव्यम्।

तृतीयः अध्यायः

वर्णमात्रा–प्रस्तार–सिद्धान्ताः तेषां भौतिकी–शास्त्रे प्रयोगाश्च

(Indian binary extensions and their uses in Physics)

छन्दःशास्त्रे वर्णच्छन्दसां मात्रा–छन्दसां च सिद्धान्तेषु प्रस्तार-विधिः उपलभ्यते। वैदिक–साहित्ये तु छन्दांसि केवलं जाति–रूपाण्येव आसन्। ऋषि–कृते छन्दःशास्त्रे गुरु–लघु–प्रस्तारस्य सिद्धान्तः उपज्ञातः लभ्यते। मात्रा–प्रस्तारस्य सिद्धान्ताः वर्ण–छन्दसां प्रस्तार सिद्धान्तेभ्यः कठिनतराः परन्तु भौतिक्यादि–शास्त्रेषु नितराम् उपयुक्ताः इत्यत्र विवेचनं प्रस्तोष्यते। वैदिक–गायत्र्यादिकानि छन्दांसि लौकिक–भाषायां चतुष्पात्त्वेन जाति–रूपेण स्वीकृतानि। परम् तत्राक्षर–संख्या न परिवर्तिता इति बोध्यम्। तत्र प्रत्येकं जातौ गुरुलघु–विन्यासेन प्रस्तार–विधयः स्वीकृताः महत्त्वपूर्णाः भेदाश्च ग्रन्थेषु पठिताः। मात्रा छन्दसां विकासः वैदिक–वाङ्मयादुत्तर–कालीन एव इति प्रतीयते। अत्र प्रथमं वर्ण–छन्दसां सिद्धान्ताः विविच्यन्ते एतद्–विषयकाः प्रारम्भिकाः शोधनिबन्धाः "विश्व संस्कृतम्" पत्रिकायां तथा च हिन्दी भाषायां हरियाणा भाषा विभाग प्रकाशितायां "सप्त–सिन्धु" पत्रिकायां च (विक्रम सं॰ 2024–2025) प्राकाश्यन्त। संस्कृत–साहित्य–विकासे, प्रस्तार पद्धत्याः उपयोगाः वाद्य–प्रयोगे, वास्तु शास्त्रे, भरत–नाट्य तथा ज्योतिषादि –शास्त्रेषु, अक्रियन्त इति नातिरोहितं संस्कृतज्ञानाम्। परम् अस्याः पद्धत्याः उपयोगः भौतिकी–शास्त्रे अस्माभिः उपज्ञातः, अत्र प्रदर्शयिष्यते।

1) छन्दःशास्त्रस्य गणितीयाः सिद्धान्ताः

छन्दःशास्त्रस्य विकास-सिद्धान्ताः संचय-क्रमसंचय-गणित-मूलकाः इति तु पिंगलशास्त्रेऽधीयानाः जानन्त्येव। अत्र निबन्धे विषयोऽयं गणितदृष्ट्या विविच्यते। अन्याश्छन्दः-शास्त्र-सिद्धान्ते दुरूहत्वेन प्रतीयमानाः कतिपयाः समस्याश्च समाधीयन्ते।

मादिभिरष्टाभिः गणैः लघुगुरुभ्यां च समस्तं वाङ्मयं व्याप्तमिति मन्वते छन्दःशास्त्रविदः। वस्तुतः मगणादयस्तु त्र्यक्षर -जाति-प्रस्तार -लभ्या एव। वर्णच्छन्दःसु त्र्यक्षरप्रस्तारः एवाचार्यैः लाघवेन संकेतार्थं प्रामाणिकत्वेन स्वीकृतः। त्र्यधिकाक्षर-प्रस्तारे संकेत -रूपेण स्वीकृते सति लाघवं न भवति इति त्र्यधिकाक्षर -जाति-प्रस्तारेण स्पष्टीभवति। मात्रिक-छन्दःसु च चतुर्मात्रिका एव गणा स्वीकृताः। चतुरधिक-मात्रा-संकेत-स्वीकारेऽधिकभेदसत्त्वात् गौरवमेव। चतुरल्प-मात्रा-संकेत स्वीकारे च अभीष्टं लाघवं नेति संचय-क्रमसंचय-सिद्धान्तेन (Theory of permutation and Combination) स्पष्टी-भवति। अत्र समार्धसम-विषमरूपाणां वर्णच्छन्दसां तथा च मात्रिकछन्दसाम् आधारभूताः सिद्धान्ताः गणितदृष्ट्या प्रतिपाद्यन्ते।

क) <u>वर्णच्छन्दांसि-</u>

एकाक्षर-जातितः आरम्भ 26 अक्षरजाति-(उत्कृति)-पर्यन्तं तदनन्तरं चण्डवृष्टि-प्रपातादि-दण्डकानां च उद्गमः गुरु-लघु-संचयेनैव भवति। तत्र षट् प्रत्ययाः (सिद्धान्तोपयुक्ताःविधयः) निम्नलिखिताः सन्ति-

(1) प्रस्तारः (2) नष्टम् (3) उद्दिष्टम् (4) एकद्व्यादिलग-क्रिया (5) संख्या (6) अध्वयोग इति।

(1) **प्रस्तारः-** पूर्वाचार्य-स्वीकृता प्रस्तार पद्धतिः-इत्थं प्रतिपाद्यते। प्रथमं सर्वगुरुभेदं लिखेत्। तदनन्तरं प्रथमं गुरुं लघुना निरस्य शिष्टं दक्षिण-पार्श्व-गतं भागं यथाऽवस्थं लिखेत्। वाम-भाग-गतान् लघूंश्च गुरूकुर्यात् एवं सर्वत्र पूर्व-भेदात् उत्तर भेदे अभीप्सिते भेदगतं प्रथमं गुरुं लघूकृत्य दक्षिण-भाग-गतं गुरुलघुजातं यथाऽवस्थं न्यस्येत्। वाम-भाग-गतान् लघूंश्च गुरूकुर्यात्। (अत्र लघूकृतात् प्रथम-गुरुतो वाम-भागे सर्वेऽपि लघव एव सन्तीति तु स्पष्टमेव) विधिरेषः सर्वलघुभेद-प्राप्तौ पर्यवस्यति। उपरि-विशकलितः "पादे सर्वगुरावाद्यात्" इत्यादि श्लोकैः श्री केदारभट्टादिभिः प्रतिपादितः विधिरेव सर्वैः आचार्यैः प्रामाणिकत्वेन स्वीकृतः। यदि सर्व-लघुभेदतः प्रक्रिया आरभ्यते तदा पूर्वभेदात् उत्तरभेदेऽभीप्सिते प्रथमं लघुं गुरूकृत्य दक्षिण-भाग-गतं गुरु-लघु-जातं यथाऽवस्थं न्यस्येत्। वामपार्श्व-गतान् गुरून् लघू-कुर्यात्। एवम् अनेन विधिना सर्वेऽपि भेदाः विलोमरीत्या लभ्येरन्। तथाहि त्र्यक्षर-प्रस्तारे परम्परीण-विधिना वैकल्पिक-विधिना च निम्नलिखिताः प्रस्तारभेदाः स्युः।

परम्परीणः प्रस्तार-विधिः

(1)	S S S
(2)	I S S
(3)	S I S
(4)	I I S
(5)	S S I

वैकल्पिक प्रस्तार-विधिः

(1)	I I I
(2)	S I I
(3)	I S I
(4)	I S I
(5)	I I S

(6)	I S I	(6)	S I S
(7)	S I I	(7)	I S S
(8)	I I I	(8)	S S S

एवं च केदारभट्ट-प्रतिपादितो विधिः निम्नश्लोकरूपेण परिवर्तयितुं शक्यते। तथा हि-

"पादे सर्वलघावाद्यात् गुरुन् न्यस्य लघोरधः।
यथोपरि तथाशेषं भूयः कुर्यादमुं विधिम्।"
"ऊने दद्याल्लघूनेव यावत्सर्वगुरुर्भवेत्।
प्रस्तारोऽयं समाख्यातश्छन्दोविचिति-वेदिभिः।।"

आचार्यैः सर्वगुरुभेदत आरभ्यैव गणना कृता। एवं च प्रस्तार-भेद-विशेषस्य संख्याऽपि स्थिरा प्रामाणिकत्वेन स्वीकृता भवति। वस्तुतस्तु प्रस्तारणेऽन्येऽपि बहवो विधयः स्युरिति तु संचय-क्रम-संचय-विदो जानीयुरेव। अत्र सर्वेषु विधिषु उपपत्तिरपि सरलैव। आचार्याः सर्वान् संचयभेदान् अनया रीत्याऽसाधयन् त्येषा उपज्ञा गणित-शास्त्रस्य इतिवृत्ते भृशं महत्त्वमावहति।

(2) **नष्टम्-**

'a'-अक्षर-प्रस्तारे 'p' तमः प्रस्तारभेदः किंरूपः? इति जिज्ञासायां नष्ट-प्रत्यय-विधिः प्रयुज्यते। तथा हि-

'नष्टस्य यो-भवेदंकस्तस्याऽर्धेऽर्धे समे च लः।
विषमे चैकमाधाय तस्याऽर्धेऽर्धे गुरुर्भवेत्।।

अत्रोपपत्तिः-

परम्परीणे प्रस्तारविधौ सर्वगुरोः भेदात् प्रक्रमो भवति। अत्र यो विधिः स्वीकृतः तदनुसारेण विषमसंख्याके प्रस्तार-भेदे प्रथमं रूपं गुरु स्यादिति तु स्पष्टमेव। प्रथम-द्वितीययोः द्वितीयं रूपं गुरु, तृतीय-चतुर्थयोश्च भेदयोः द्वितीय रूपं लघु। पञ्चम-षष्ठयोश्च

द्वितीयं रूपं गुरु इत्येषा स्थितिः निपुणं निरीक्षणेन स्पष्टी भवति।

एवमेव प्रथमे भेदचतुष्के तृतीयं रूपं गुरु, द्वितीये भेदचतुष्के (अर्थात् पञ्चमतोऽष्टमं यावत्) तृतीयं रूपं लघु भवति। साधारण्येन एतद् वक्तुं शक्यते यत् a संख्याक-भेदेषु p तमं रूपं निम्नलिखित विषमीकरण-सम्बन्धानुसारं गुरुं लघु भवति। तथा हि-

यदि $1 \le a \le 2^{p-1}$ तदा 'p' तमं रूपं गुरु स्यात्।

यदि $2^{p-1}+1 \le a \le 2 \times 2^{p-1}$ तदा 'p' तमं रूपं लघु स्यात्।

यदि $2 \times 2^{p-1}+1 \le a \le 3 \times 2^{p-1}$ तदा 'p' तमं रूपं गुरु स्यात्।

साधारणीकरणेन एवम् फलितं भवति यत्-

यदि $k \times 2^{p-1} + 1 \le a \le (k+1)2^{p-1}$ (1)

अत्र $k =$ समोऽङ्कः, तदा 'p' तमं रूपं गुरू।

$k =$ विषमोऽङ्कः, तदा 'p' तमं रूपं लघु।

यदि (1) विषमीकरण-सम्बन्धे $'p' = 1$

तदा $k + 1 \le a \le k + 1$

वा $a = k+1$ अतो यदि $a =$ विषमः (अर्थात् k समः) तदा प्रथमं रूपं गुरु

यदि $a =$ समः (अर्थात् k विषमः) तदा 'p' तमं रूप लघु स्यात्

यदि $a =$ समः तदा $p = 2$ अस्य कृते

$$k \times 2 + 1 \le a \le 2(k+1)$$

$$\therefore k + \frac{1}{2} \le \frac{a}{2} \le k + 1$$

यतो हि $'a' =$ समोऽङ्कः, $\therefore \frac{a}{2} =$ पूर्णांकः।

$\therefore \dfrac{a}{2} = k + 1$ अतः द्वितीयं रूपं गुरु।

यदि $\dfrac{a}{2} =$ विषमः (अर्थात् $k =$ समः)

तदा एतत् द्वितीयं रूपं लघु भवितृ यदि $\dfrac{a}{2} =$ समोऽंकः।

यदि $n =$ विषमो भवेत् तदाऽपि

$$k + 1 \le \frac{a+1}{2} \le k + 1 + \frac{1}{2}$$

यतो हि $\dfrac{a+1}{2} =$ पूर्णांकः,

अतः $\dfrac{a+1}{2} = k + 1$ एवमत्राऽपि पूर्व एव विधिः फलति।

एवमेव $p = 3,4,- - - -$ कृते प्रक्रियायां अनुष्ठितायां पूर्व एव विधिः फलितो भवति। एषोपपत्तिः नैव पूर्वं केनापि दत्ता। अत्र साधारणीकरण-पद्धत्या साधिता, विमृष्टा च। एष विधिः आधुनिक-पद्धत्यनुसारी न। अत्र सर्वासां सम्भविनीनां पद्धतीनां विवेचनं मम इंग्लिश-प्रकाशने द्रष्टव्यम्।

यदि वैकल्पिक विधिः (सर्वलघुभेदत आरभ्य पूर्व-प्रतिपादित प्रक्रियया संवलितः) स्वीक्रियेत तदा तु निम्नोक्त-सूत्रस्य अवतारो भवेत्।

नष्टस्य यो भवेदंकः तस्यार्धेऽर्धे समे च गः।
विषमे चैकमाधाय तस्यार्धेऽर्धे च लघुर्भवेत्।।

(3) <u>उद्दिष्टम्-</u> यदि भेदरूपं गुरु-लघु-विन्यासाऽऽत्मकं दत्तं स्यात् तदाऽस्य संख्यां ज्ञातुमेष विधिः प्रयुज्यते।

उद्दिष्टं द्विगुणानाद्यादुपर्यंकान् समालिखेत्।
लघुस्थाः ये तु तत्रांकास्तैः सैकैः मिश्रितैर्भवत्।।

वैकल्पिके प्रस्तार-विधौ तु सूत्र-रूपम् इत्थं भवेत्-

उद्दिष्टं-द्विगुणानाद्यादुपर्यंकान् समालिखेत्।
गुरुस्था ये तु तत्रांकास्तैः सैकैर्मिश्रितैर्भवेत्।।

(4) **एकद्व्यादि-लग-क्रिया-** (Permutation & Combination)

श्रीभास्कराचार्यादि-प्रतिपादितांक-पाशादि-गणित-साहाय्येन एकद्व्यादि-गुरु-लघु-संवलित-भेद-संख्या सुसाधा। केदारभट्ट प्रतिपादितः परम्परीणः विधिस्तु कठिनो विस्तृतश्च। वैकल्पिक -पक्षेऽपि एष एव विधिः सुप्रयोजः। एनं परम्परीणं विधिम् अत्राविविच्य सरलं गणितं प्रस्तूयते-

यदि $n =$ स्थान संख्या, तदा $'r'$ गुरुभेद-संख्या तु n स्थानेषु $'r'$ संख्याक-स्थान-संचयेन लप्स्यते। अतः $'r'$ गुरुभेद-संख्या

$$= n_{c_r} = \frac{\angle n}{\angle(n-r)\angle r} \qquad (2)$$

एवं च एकगुरुभेदसंख्या $= n_{c_1} = n$

द्विगरुभेदसंख्या $= n_{c_2} = \dfrac{n(n-1)}{1 \times 2}$

एवमन्यसंख्याक-गुरु-लघु-भेदसंख्याऽपि सुसाधा। अत्र निम्ननिर्दिष्टाः परिणामाः महत्त्वपूर्णाः विद्यन्ते -

यतोहि-

$$n_{c_r} = n_{c_{n-r}}$$

अतः $'r'$ गुरु-भेदसंख्या $= 'n-r'$ गरु-भेद-संख्या।

तथा च $'r'$ गुरुभेदसंख्या $= 'r'$ लघु-भेद-संख्या।

(5) **संख्या-** प्रस्तार-भेद-पूर्ण-संख्यां ज्ञातु संख्या-विधिः प्रयुज्यते केदारभट्ट प्रतिपादितः सम्पूर्णभेदज्ञानार्थं संख्या-प्रत्यय -विधिरपि विस्तृत एव। सरलस्तु अत्र प्रदर्श्यते-

सम्पूर्ण-भेदसंख्या एक-द्वि-त्रि-चतुः-पञ्चादि-निखिल-रूप -पर्यन्त-गुरुभेद सख्यानां युतिः + सर्वगुरु भेद संख्या =

$$n_{c_1} + n_{c_2} + n_{c_3} + --- + n_{c_n} + n_{c_0} = (1+1)^n = 2^n \qquad (3)$$

उद्दिष्ट-प्रत्यय-साहाय्येनापि (3) सूत्रं साधयितुं शक्यते। तथाहि परम्परीण प्रस्तार-विधौ सर्व-लघु-भेदे प्रक्रिया पर्यवस्यति। अतः सर्व-लघु भेदस्योद्दिष्ट विधिना ज्ञाता संख्यैव सम्पूर्ण-भेद संख्या स्यात्। एवं च-

उपरि अंकाः- $1,2,4,8,16,32,------2^{n-1}$

सर्व-लघु-भेदः- $1,1,1,1,1,1---------1$

लघुस्थांक योगः सैकः = सर्व-लघु-भेद संख्या

सम्पूर्ण भेदसंख्या $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ----- + 2^{n-1} + 1$

$\frac{2^n - 1}{2 - 1} + 1 = 2^n$ इत्युपपन्नं सर्वम्।

(6) <u>**अध्वयोगः**</u> एतेन विधिना प्रस्तारार्थम् अपेक्षितम् स्थान-मानं ज्ञायते। एष विधिः सरल एव अतो न विविच्यते।

<u>अर्ध-समवृत्तानि</u> तु तानि, येषां प्रथम-तृतीयौ पादौ द्वितीय -चतुर्थो च पादौ समलक्षणौ परं भिन्नाक्षर-संख्यौ भवेताम्।

यदि प्रथमपादाक्षरसंख्या $= n_1$

द्वितीय पादाक्षरसंख्या $= n_2$ यत्र $n_1 \neq n_2$ तदा गुरु-लघु -संचयवशेन सम्भविनी प्रथम-पाद-भेद-संख्या $= 2^{n_1}$ एवमेव द्वितीय-पाद-भेद-संख्या $= 2^{n_2}$

प्रत्येकं प्रथम-पाद-भेदानां द्वितीय-पाद-भेदानां प्रत्येकेन सञ्चेतुं शक्यते। एवं चोपर्युक्तलक्षण युतस्यार्धसम-वृत्तस्य भेद-संख्या $= 2^{n_1} \times 2^{n_2} = 2^{n_1 + n_2}$

अत्रेदम अवधेयम्-यत यदि $n_1 = n_2 = n$,

तदा तु उपरि-साधित-भेद-संख्यातः समवृत्त-भेद-संख्या शोधयितव्या जायते। एवं च सम्भवि-भेदसंख्या$= 2^{2n} - 2^n(2^n - 1)$

<u>विषम-वृत्तानि-</u> अत्र पादेषु गुरु-लघु-विन्यासे वा अक्षर संख्यासु भेदः वृत्तस्य-वैषम्य-प्रकृतिः। यदि

प्रथम-पादेऽक्षर-संख्या $= n_1$

द्वितीय पादेऽक्षर संख्या $= n_2$

तृतीय-पादेऽक्षर-संख्या $= n_3$

चतुर्थ-पादेऽक्षरसंख्या $= n_4$

(यत्र $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_4$)

अत्र सम्भवि-वृत्त-संख्या $= 2^{n_1+n_2+n_3+n_4}$

यदि $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$, तदा तु भेदसंख्या

$$= 2^{4n} - 2^n = 2^n(2^{3n} - 1)$$

n_1, n_2, n_3, n_4 एषु त्रयाणां द्वयोर्वा तुल्यत्वेऽपि लघु-गुरु -विन्यास-साहाय्येन वृत्तस्य विषमत्त्वं भविष्यत्येव। एतादृशीषु स्थितिषु भेदाः गणितरीत्या सुसाधा एवेति विस्तार-भयान्न विविच्यते।

पूर्वाचार्यैः संख्या-प्रत्यय-सहाय्येन केवलं समवृत्तानामेव संख्या साधिता। अत्रोपरि-प्रतिपादित-विवेचनानुसारं तु सर्वेषामपि अर्ध -सम-विषम-वृत्तानां सम्पूर्ण-भेदसंख्याः सुसाधाः। अनयैव पद्धत्या चतुरधिक-चतुरल्प-पादवृत्तानाम् 'अपि भेदसंख्या साधयितुं शक्यते।

अधुना शास्त्रज्ञ-विनोदार्थम् एका समस्या प्रस्तूयते, समाधीयते च। उत्कृति-(षड्-विंशत्यक्षर)-जातौ परम्परीण पद्धत्या प्रस्तार्यमाणायां यत्र विषम स्थान-रूपाणि लघूनि तथा च समस्थान-रूपाणि गुरूणि तस्य भेदस्य संख्या का?

रूपं चैतदस्ति- 1, 4, 16, ------- 2^{24}
I S I S I --------- I S

भेदसंख्या $= 1 + 4 + 16 + 64 + - - - - - + 2^{24}$

$$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + - - - - - + 4^{12} + 1$$

$$= \frac{4^{12} - 1}{4 - 1} + 1 = \frac{4^{12} - 1}{3} + 1$$

ख) **<u>मात्रिकच्छन्दांसि</u>**- मात्रिक-छन्दःसु चतुर्मात्रिक एव संकेतः स्वीकृतः आचार्यैः। अत्र साधारण-दृष्ट्या n मात्रिक-रूपस्य कति भेदाः गणित-दृष्ट्या सम्भवन्तीति पूर्वं विमृश्यते।

यदि कस्मिश्चन भेद-विशेषे गुरुसंख्या $= g$ लघुसंख्या $= l$ तदा $2g + l = n$ (4)

$$\therefore g = \frac{-l + n}{2}$$

अत्र कुट्टनार्थं वल्ली $\begin{cases} 0 & 0 \\ n & n \end{cases}$

यद्यप्यत्र वल्ली विषमा, परं भाज्यम् ऋणं अतो वल्ली विकोच-विधिना लब्धे गुणाप्ती एव वास्तविके गुणाप्ती स्तः। तथाहि तत्र मम सूत्रम्-

धनर्ण-वल्ल्योर्विषमाः समास्ताः स्युर्लब्धयश्चेद् गणकैस्तदानीम्।
पूर्वागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ स्वतक्षणाच्छेष-मितौ तु तौ स्तः।।

धनर्णवल्ल्योः लब्धयः क्रमशः समाः विषमाश्चेत् तदा शोधनं नापेक्षितम् इति भावः। एवं भास्कराचार्यस्य ऋण -वल्ली-खंडनम् अपास्तम् इति-बोध्यम्। इष्टाहत-स्व-स्वहरेण युक्ते-इति भास्करीय-सूत्रानुसारम् 'e' इष्टं परामिति-चलं प्रकल्प्य प्राप्ते परामिति-समीकरणे

$$g = -e \quad \text{(A)}$$
$$l = +2e + n \quad \text{(B)} \qquad (5)$$

अधुनाऽत्रानिर्णीतानि मौल्यानि निर्णयन-विधया निर्णीयन्ते। प्रस्तुते g मानेन सदैव धनात्मकेन भाव्यम्। अतः e-मानेन सदैव ऋणात्मकेन भाव्यम्। किञ्च l मानेन धनात्मकेन भाव्यम्।

अतः- $2e + n \geq 0 (\because e \leq 0)$

$$\because e \geq -n/2 \qquad (6)$$

अत्र द्वे स्थिती अवधातव्ये स्तः

(1) $n =$ समोऽंकः।

(2) $n =$ विषमोऽंकः।

यदि $n =$ समोऽंकः

तदा $e = -1, -2, -3, ----, -n/2$ एतान्येव 'e' मानानि मान्यानि स्युः। अर्थात्--

$g = 1, 2, 3, ---, n/2$ इत्येतानि 'g' मानानि स्युः।

यदि $n =$ विषमोऽंकः तदा

$g = 1, 2, 3, -----, (n-1)/2$ एतानि एव 'g' मानानि भवितुमर्हन्ति।

यद्यपि कुट्टनमन्तराऽपीमे परिणाामाः साधयितुं शक्यन्ते, परं पाठकाः प्लुतस्य (त्रिमात्रिकस्य) अपि संकेते स्वीकृते समस्यां समाधातुं क्षमेरन्, अत एवायमत्र निर्णयन-विधिं निर्देष्टुं प्रयासः।

अधुना विशिष्ट - 't' संख्याक-गुरु-युतस्य प्रस्तार-भेदस्य -सर्वेऽपि संचय-सम्भविनो भेदाः साध्यन्ते-

अत्र संकेते -'t'- संख्याकाः गुरवः '$n - 2t$' संख्याकाः लघवश्च सन्ति। यतो हि गुरुर्द्विमात्रिकः, लघुरेकमात्रिको भवति इति। अत्र सम्पूर्ण-मात्रा-संख्या च 'n' तुल्या स्वीकृता विद्यते।

एवं चात्र सम्पूर्ण-स्थान-संख्या $= n - 2t + t = n - t$

अधुना '$n - t$' स्थानेषु 't' संख्याका गुरवः। '$n - t$' संख्याका लघवश्च संचेयाः सन्ति।

अतोऽस्य रूपस्य संचयभेदाः

$$N_n = \sum {}^{n-t} c_{\,t = 0,1\ldots}$$

यतोहि 't' = गुरुसंख्या। गुरूणां सखंया तु $0, 1, 2, - - - - \frac{n-t}{2}$ (विषमे 'n' माने) अथवा $\frac{n}{2}$ (समे 'n' माने) पर्यन्तं भवितुर्महति।

अतः 'n'-मात्रिकरूपे सम्पूर्णा सम्मवि-भेदसंख्या उपरि-साधित-संचय-भेदानां मानेषु $n/2$ वा $(n-1)/2$ उत्थाय्य योगे कृते लभ्येत इति स्पष्टमेव। एवम् 'n' मात्रिक-रूपे सम्पूर्णा सम्भवि-भेद-संख्या- लभ्येत।

निर्दिष्ट-सूत्रानुसारं विभिन्न-मात्रिक-रूप-स्वीकारे भेदसंख्यानां कोष्ठकम्-

मात्रा संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9
भेदाः	1	2	3	5	8	13	21	34	55

(7)

अत्र $N_{n-1} + N_n = N_{n+1}$

एतां श्रेणीं तु प्रजनन - वल्ली शब्देन व्यपदेक्ष्यामः। आधुनिकाः तु फिबोनासी श्रेणी (Fibonacci Series) इति व्यपदिशन्ति।

आचार्यैः चतुर्मात्रिकसंकेतः स्वीकृतो यत्र पञ्च भेदाः लभ्यन्ते। पञ्चमात्रिक-संकेते अष्टौ गणाः लभ्यन्ते। अत्र न लाघवम्। किञ्च चतुर्मात्रिक-संकेत-स्वीकारे मनुष्यस्य जिह्वेन्द्रिय -प्रकृति-सम्बद्धमपि कारणमस्तीति मन्ये। एष खलुअन्वेषणस्य विषयः।

ग) <u>**आर्याछन्दसः भेदाः**</u> संख्या-प्रत्यय-साहाय्येन सम्पूर्णाः सम्भविनो भेदाः साधिताः। पर मत्रिकच्छन्दसां भेद-साधनार्थं न केनचनापि प्रयस्तम्। अत्र संचय-क्रम-संचय-गणित-साहाय्येन आर्याभेद-साधनार्थं सूत्रोपपादनं दर्श्यते। आर्या-लक्षणं चैतदस्ति--

लक्ष्मैतत् सप्त गणाः गोपेताः भवति नेह विषमे जः।
षष्ठोऽयं न-लघू वा प्रथमेऽर्धे नियतमार्यायाः।।
षष्ठे द्वितीयलात्परके-न्ले मुखलाच्च सयति-पद-नियमः।
चरमेऽर्धे पञ्तमके तस्मादिह भवति षष्ठो लः।।

अत्र पूर्वार्धे सप्त चतुर्मात्रिकाः गणाः गुरूपेताः भवन्ति। परम एषु विषमो जगणो न भवितुमर्हति। षष्ठो नलघू, जगणो वा भवतीति नियमः। एतं नियमनुसृत्य प्रथमं पूर्वार्ध-भेदा एव साध्यन्ते।

यदि चातुर्भात्रिक-संकेते जगण-वर्जमन्ये गणाः प्रथम-द्वितीय-तृतीय-चतुर्थ-शब्दैः व्यवह्रियेरन्, तदा तु कल्प्यते-- कस्मिंश्चन आर्या-भेदे-

प्रथमो गणः 'r_1' वारं लभ्यते।
द्वितीयो गणः 'r_2' वारं लभ्यते।
तृतीयो गणः 'r_3' वारं लभ्यते।
चतुर्थो गणः 'r_4' वारं लभ्यते।

षष्ठो गणः जगणः, नलघ्वात्मको वा भवति। अतो यदि गण स्थितयः स्थान-शब्देन व्यपदिश्येरन, तदैतद् वक्तुं शक्यते यत्

षष्ठं स्थानं द्विधा पूरयितुं शक्यम्। अनयोरुभयोः विधयोः प्रत्येकं कृते जगण-वर्जमन्येषां चतुर्णां गणानां कृते 6 स्थानानि सन्ति। अतः

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 6 \tag{8}$$

यत्र- $r_1, r_2, r_3, r_4, = 0,1,2,3,4,5,6,$

(8) समीकरणस्य कति समाधानानि सन्ति? इति तु भास्करीयया नियतांक-योग-सम्बन्धिन्या अकंपाश-पद्धत्या सुसाधम्। परम् अत्रेदमवधेयम् यत् $r_1, r_2, r_3, r_4 - - r_6$ मानानि शून्यतुल्यान्यपि भवितुर्महन्ति।

प्रथमो गणः r_1 स्थानेषु $6_{c_{r_1}}$ विधाभिः स्थापयितुं शक्यते। आसु विधासु कयाचनापि विधया प्रथमे गणे स्थापिते, द्वितीयस्मै गणाय केवलं $6 - r_1$ स्थानान्यवशिष्यन्ते। एवं च प्रथमगणस्य $6_{c_{r1}}$ विधासु प्रत्येकं विधायै द्वितीयेन गणेन $6 - r_{1cr_2}$ विधाभिः स्थानपूर्तिः सम्भवति। अतो गणद्वय-दृष्ट्या $6_{c_{r_1}} \times 6 - r_{1_{c_2}}$ भेदाः भवन्ति। साधारणीकरण-पद्धत्या एतत् वक्तुं शक्यते यत् गण-चतुष्टय-दृष्ट्याः भेद संख्या =

$$si_{cr_1} \times si1_{cr_2} \times si2_{cr_3} \times si3_{cr_4} \tag{9}$$

यत्र $Si = 6, Sik = Si - r_1 - r_2 \cdots - r_k$ पर्यन्तम्

एते तु ते भेदाः सन्ति ये प्रथमं गणं $'r'_1$ वारम्, द्वितीयगणं $'r'_2$ वारम्, तृतीयगणं $'r'_3$ वारम्, चतुर्थं च गणं $'r'_4$ वारं दधतीति।

यदि 'r' मानानि चलानि मन्येरन्, तदा तु (८) निरोध (Constraint) समाधानांतर्गतानां सर्वेषां चल-मानानां कृते (9) समीकरण-योगेन सर्वेऽपि भेदाः लभ्येरन्-

इमे भेदाः $= \sum si_{cr_1} \times si1_{cr_2} \times si2_{cr_3} \times si3_{cr_4}$ (10)

(r_1, r_2, r_3, r_4)

निरोधः $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 6$

$r_1, r_2, r_3, r_4 = 0,1,2,3,4,5,6$

एते तु ते भेदाः सन्ति यत्र द्वितीय-चतुर्थयोः स्थानयोः जगणो नास्ति। अधुना कल्प्यते यत् जगणः षष्ठ-स्थान-वर्जमेकवारं लभ्यते। अनेन द्वितीय-चतुर्थ-स्थानयोः पूर्तिर्द्विधा कर्तुं शक्यते। अधुना चतुर्णां जगणातिरिक्त-गणानां कृते केवलं पञ्चैव स्थानान्यवशिष्यन्ते।

अतो निरोधस्तु निम्नलिखितः स्यात्:-

$r_1, r_2, r_3, r_4 = 0,1,2,3,4,5,$

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 5$ (11)

अतः एतादृशा भेदाः येषु षष्ठस्थान-वर्जं जगणः एकवारं लभ्यते, तेषां संख्या

$= 2 \times \sum fi_{cr_1} \times fi1_{cr_2} \times fi2_{cr_3} \times fi3_{cr_4}$ (12)

यत्र $fi = 5, fik = fi - r_1 - r_2 \ldots\ldots\ldots\ldots - r_k$ पर्यन्तम्

निरोधः $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 5$

$r_1, r_2, r_3, r_4 = 0,1,2,3,4,5,$

अधुना कल्प्यते जगणः षष्ठ-स्थान-वर्जं द्विवारं लभ्यते। अस्यां स्थितौ तु निरोध एष भवेत्-

$r_1, r_2, r_3, r_4 = 4$ (13)

$$r_1, r_2, r_3, r_4 = 0,1,2,3,4,$$

उपरि-विमृष्ट-पद्धत्यनुसारं प्रक्रियायामनुष्ठितायां येषु षष्ठ-स्थान-वर्जं जगणो द्विःलभ्यते, तेषां भेदानां संख्या-

$$=2 \times \sum fo_{cr_1} \times fo1_{cr_2} \times fo2_{cr_3} \times fo3_{cr_4} \qquad (14)$$

यत्र $fo = 4,\ fok = fo - r_1 - r_2 \ldots - r_k$ पर्यन्तम्

निरोधः $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4$

$$r_1, r_2, r_3, r_4 = 0,1,2,3,4,$$

अतो येषु षष्ठो जगणः, ते भेदाः (10), (12), (14) समीकरणानां योगतुल्याः, स्युः। एतावन्तः एव भेदाः षष्ठ स्थाने नलघ्वात्मके गणे सत्युत्पद्यरेन्। अतः पूर्वार्धभेदाः उपर्युक्त व्यंजक-त्रय-योगेन लभ्या।

अत्र उत्तरार्ध-भेदा पूर्वार्धभेद-संख्यातः अर्धतुल्याः स्युरिति तु स्पष्टमेव। एतं च पूर्वाधोत्तरार्ध संचयनेन जाता आर्या-

$$\text{भेदसंख्या} = \sum si_{cr_1} \times si1_{cr_2} \times si2_{cr_3} \times si3_{cr_4}$$
$$+ 2 \times \left[\sum fi_{cr_1} \times fi1_{cr_2} \times fi2_{cr_3} \times fi3_{cr_4}\right.$$
$$\left. + \sum fo_{cr_1} \times fo1_{cr_2} \times fo2_{cr_3} \times fo3_{cr_4}\right]^2 \qquad (15)$$

अस्य मौल्य-साधने पर्याप्तः कालोऽपक्ष्यते। गणक-संयत्र साहाय्येन समस्या सुसाधा। अत्र आर्याभेदसूत्रम् उपपाद्यअधुना भेदानामंकात्मिका संख्या अधस्ताद् विलिखित-सूत्र - सहाय्यैन साध्यते-

यदि $r_1 + r_2 + - - - - r_n = k$

यत्र $r_1, r_2 - - r_n$ इत्येषां सर्वेषां चलानां मानानि

$0,1,2,3,- - - - - - - -\ n$ तुल्यानि भवितुमर्हन्ति

तदा- $$\sum^{k} \frac{\angle n}{\angle r_1 \angle r_2 \angle r_3 - - - - - \angle r_n} = n^k$$

यत्र योगाः स्व-स्व-निरोधानुसारं कर्तव्याः।

अतः $$\sum \frac{\angle 6}{\angle r_1 \angle r_2 \angle r_3 \angle r_4} = 4^6 = 4096 \quad \left(\sum r_i = 6\right)$$

$$\sum \frac{\angle 5}{\angle r_1 \angle r_2 \angle r_3 \angle r_4} = 4^5 = 1024 \quad \left(\sum r_i = 5\right)$$

$$\sum \frac{\angle 4}{\angle r_1 \angle r_2 \angle r_3 \angle r_4} = 4^4 = 256 \quad \left(\sum r_i = 4\right)$$

अतः सम्भविनः आर्याभेदाः $$2\{4096 + 2 \times 1024 + 256\}^2$$
$$= 2 \times 6400^2 = 81920000$$

एतद्-विषयकं विवेचनं 1967-वर्षे अप्रैलमासे हरियाणा भाषा -विभागेन प्रकाशितायां सप्तसिन्ध्वाख्यायां पत्रिकायां प्रकाशितं विद्यते।

अनयैव पद्धत्या अन्येषां पथ्यादि-मात्रिकच्छन्दसामपि भेदाः साधयितुं शक्यन्ते। किञ्च उपरि-प्रतिपादितेषु भेदेषु कति भेदाः ईदृशाः सन्ति, येषु 'n' लघु गणस्य द्वितीयस्मिन् लघौ यतिर्भवति? एतादृश्यः समस्याः अपि समाहिताः जायन्ते।

आचार्यैः मात्रिकच्छन्दसां संख्या-साधनार्थं न प्रयस्तम्। एतत्-सम्बन्धि गणितं विस्तृतं दुरूहं चास्ति। अत्र एषः प्रथमो मौलिकः प्रयासः। अत्र कम्पुटर-द्वारा गणित-संकेत-लेखने समस्याः आसन्। अतः *fik* संकेताः विशेष-प्रतिपत्त्यर्थं व्याख्यांताः परिभाषिताः।

घ) भौतिकीय शास्त्रे प्रयोगाः

अत्र वर्णच्छन्दसां प्रस्तारस्य (Binary Extenstions) भौतिकी शास्त्रे उपयोगार्थं किञ्चित् प्रस्तुमः। एतत्तु सर्वेऽपि भौतिकी-शास्त्रज्ञाः जानन्त्येव यत् घूर्णाभ्याकाशम् (Spin Space) द्विबिन्दुकम् इति। यदि गुरु-संकेतेन उर्ध्वः आभ्यन्तरः घूर्णः तथा च लघु-संकेतेन अधस्तनः आभ्यन्तरः घूर्णः द्योत्येत, तदा तु फरमियानिक-कणानाम् तुल्याभ्यन्तर-घूर्ण-संवलितानां कुलकस्य कृते सम्भविन्यः सर्वाः अवस्थाः प्रस्तारेण साधयितुं शक्यन्ते। तथाहि त्रयाणाम् इलैक्ट्रोनानां कृते प्रथमा अवस्था सर्वगुरु तुल्या (SSS)। आधुनिक-संकेत-सरणिम् अनुसृत्य यदि ऊर्ध्वदिक्कं धनुः वा (+) तथा अधोदिक्कं धनुः वा (–) इति उभौ संकेतौ क्रमशः उर्ध्वम् अधस्तनं च आभ्यन्तरं घूर्णं द्योतयतः। तदा प्रतिरूप-प्रस्तार-विधया प्रथमम् ऊर्ध्वदिक्कं धनुः अधोदिक्कीकुर्यात् दक्षिण पार्श्वगतानां सर्वेषामपि धनुश्चिह्नानां यथावस्थं विन्यासे कृते ततश्च वाम-पार्श्वगतानां धनुश्चिह्नानां च परिवर्ते अनुष्ठिते अग्रिमा अवस्था लभ्यते। एवं सर्वेषु धनुश्चिह्नेषु अधोदिक्केषु प्राप्तेषु सर्वाः अवस्थाः जनिताः जायन्ते। एवमेव (+, –) संकतैरपि। किञ्च यदि अत्र ऊर्ध्वदिक्काभ्यन्तर-घूर्णावस्थायाः कृते $\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ संकेतः स्तम्भव्यूह -रूपः, तथा च अधोदिक्काभ्यन्तर -घूर्णावस्थायै संकेतः $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ भवेत्। तथा च अधः पृष्ठसंकेतः इलैक्ट्रोन संख्यां द्योतयेत्। तथा हि यदि $\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1$ संकेतः प्रथमस्य इलैट्रोनस्य ऊर्धदिक्काभ्यन्तर - घूर्णावस्थां द्योतयेत्। तदा - अनया संकेत - विधयाऽपि प्रस्तार-पद्धत्या सर्वाः अवस्थाः सुखेन साधेलिमाः। तथा हि त्रयाणाम् इलैक्ट्रोनानां कृते विविधसंकेत विधाभिः

प्रस्ताराः अधस्तात् दर्शिताः।-

(1)	(2)	(3)	(4)
↑ ↓ ↓	$\alpha\ \alpha\ \alpha$	$\binom{1}{0}_1, \binom{1}{0}_2, \binom{1}{0}_3$	+ + +
↓ ↑ ↑	$\beta\ \alpha\ \alpha$	$\binom{0}{1}_1, \binom{1}{0}_2, \binom{1}{0}_3$	− + +
↑ ↓ ↑	$\alpha\ \beta\ \alpha$	$\binom{1}{0}_1, \binom{0}{1}_2, \binom{1}{0}_3$	+ − +
↓ ↓ ↑	$\beta\ \beta\ \alpha$	$\binom{0}{1}_1, \binom{0}{1}_2, \binom{1}{0}_3$	− − +
↑ ↑ ↓	$\alpha\ \alpha\ \beta$	$\binom{1}{0}_1, \binom{1}{0}_2, \binom{0}{1}_3$	+ + −
↓ ↑ ↓	$\beta\ \alpha\ \beta$	$\binom{0}{1}_1, \binom{1}{0}_2, \binom{0}{1}_3$	− + −
↑ ↓ ↓	$\alpha\ \beta\ \beta$	$\binom{1}{0}_1, \binom{0}{1}_2, \binom{0}{1}_3$	+ − −
↓ ↓ ↓	$\beta\ \beta\ \beta$	$\binom{0}{1}_1, \binom{0}{1}_2, \binom{0}{1}_3$	− − −

वैकल्पिक-विधया सर्वाधोधनुश्चिह्न-संकेततः प्रारभ्यापि अवस्थाः सुलभाः। वस्तुतः कस्याश्चन अपि अवस्थातः प्रारभ्य उपरि अधश्च अवस्थाः सारण्यां पूरयितुं प्रस्तारः सुकरः एव। किञ्च दक्ष-पार्श्वतः परिवर्तनं स्वीकृत्यापि प्रस्तारः सुकरः। एवम् एकद्व्यादि-लग-क्रिया-नष्टोद्दिष्टादिनियमाः व्यापकी कर्तव्याः-तत्र न काठिन्यम् इति तु सर्वेऽपि गणितज्ञाः मन्येरन् इति। किञ्च यदि 1,2,3 इत्यादिभिः पृष्ठ-संकेतैः एकस्यैव इलैक्ट्रोनस्य कक्षीयः कोणीय-संवेगः द्योत्येत, तदा अपि प्रस्तारः सुकरः

एतादृक्ष्यां स्थितौ स्तम्भ (3) दर्शिताः अष्टौ अपि अवस्थाः त्रयाणाम् इलैक्ट्रोनानां संकेतित-तुल्य-कक्षीय कोण-संवेग-संवलितानां समुच्चयेन जनिताः स्युरिति स्पष्टमेव। यदि च क्रमसंचयोऽपि

अभीष्यते, (न तु इलैक्ट्रोनानाम् अपि तु प्रोटोनादीनां कृते) तदा प्रत्यवस्थम् $\angle 3 = 6$ उपावस्थाः लभ्येरन्। (दृश्यतां (5) स्तम्भे) सर्वेऽपि भेदाः 48 संख्याकाः स्युरिति नातिरोहितं गणित विदाम्। एतासां विशिष्टानां कक्षाणां कृते विशिष्टाः क्वान्तमांकाः उपयोज्याः स्युः। किञ्च द्व्यधिक-बिन्दुकाः अवस्थाः जनयितुं प्रस्तार-विधिः व्यापकीकरणीय इति तु स्पष्टमेव।

(5)

$$\binom{0}{1}_1 \binom{1}{0}_2 \binom{1}{0}_3$$
$$\binom{0}{1}_1 \binom{1}{0}_3 \binom{1}{0}_2$$
$$\binom{0}{1}_2 \binom{1}{0}_1 \binom{1}{0}_3$$
$$\binom{0}{1}_2 \binom{1}{0}_3 \binom{1}{0}_1$$
$$\binom{0}{1}_3 \binom{1}{0}_2 \binom{1}{0}_1$$
$$\binom{0}{1}_3 \binom{1}{0}_1 \binom{1}{0}_2$$

विस्तरभयाद् अत्र मात्रा-प्रस्तारादि-षट्प्रत्यय-विवेचनं न क्रियते। आसां प्रस्तार-पद्धतीनाम् आंकिक-इलैक्ट्रोनिक-दविष्ठ-संचारे (Digital Electronic Communications) उपयोगाः सुकराः इति निश्चप्रचम्। एतद्विषयकाः प्रपंचास्तु मम इंग्लिश भाषायां प्रकाशिते "Indian Mathematics, Advancements & Applications" पुस्तके द्रष्टव्याः इति।

चतुर्थः अध्यायः
दार्शनिक्यः धारणाः गणितं च

वस्तुतस्तु गणितस्य उद्भवः तर्क-शास्त्र-साहाय्येनैव अजायत। न्याय-वैशेषिक-दर्शनयोः सिद्धान्ताः गणितीय-संकेतैरपि अभिव्यंक्तुं शक्यन्ते। अत्र कतिपये दर्शन प्रतिपादित-राद्धान्ताः विवेक्ष्यन्ते।

क) अनुमान-प्रमाणं गणितं च

अनुमानं तु गणितस्य व्याप्यो विषयो विद्यते। अत्र अन्वय-व्यतिरेकाभ्यां कार्य-निर्वाहः। कल्प्यते यत्- "y"-भौतिक-राशिः घटना वा "x"-भौतिक-राशेः घटनायाः वा सापेक्षम् अधीयते। अत्रान्वयस्तु निम्नलिखितं सम्बन्धम् अवगमयति-

$$\left.\begin{array}{ll} \text{यदि,} & x \neq 0 \\ \text{तदा} & y \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

'यत्सत्त्वे यत्सत्त्वम्' इत्यन्वयस्य लक्षणात्। घटना-संदर्भे, "$\neq 0$" वा "$= 0$" संकेतौ घटनायाः सत्ताम् अभावं वा सूचयतः इति बोध्यम्।

'यदभावे यदभावः' इति व्यतिरेक इत्यनेन च निम्नलिखितः सम्बन्धोऽगम्यते-

$$\left.\begin{array}{ll} \text{यदि,} & x = 0 \\ \text{तदा} & y = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

प्रथम(1)-द्वितीय(2)-सम्बन्धयोःआलापकः सम्बन्धः साधारण -दृष्ट्या निम्नप्रकारकः स्याद् इति गणितज्ञाः जानीयुरेव। तथाहि-

$y = cx$ (यत्र $c =$ एकः स्थिरांकः, वा अन्यः भौतिकः राशिः $\neq 0, \infty$)

(3)

यदि $x \neq 0$ तदा $y \neq 0$ यतो हि $c \neq 0$

यदि $x = 0$ तदा $y = 0$ यतो हि $c \neq \infty$

एवं चात्र अन्वयसम्बन्धे $c \neq 0$ उपाधिः विद्यते। तथा च व्यतिरेके $c \neq \infty$ उपाधिरस्तीति न्याय-गणित-विदां नैव तिरोहितम्।

एवं चैतत् स्पष्टं यद् y-विषये $-x$ सम्बद्धाऽन्वय-व्यतिरेकयोः, $\neq 0, \infty$ रूपः उपाधि-राशिः "x"-गुणक-रूपेण प्रकटीभवतीति।

तथा च 'y'-विषये, 'x'-सापेक्षे ('x'-सम्बद्धाऽन्वय-व्यतिरेकाऽध्ययनरूपे) अनुमाने, $c \neq \infty$ उपाधिर्भवेत्, तदा 'y'-विषयके c-सापेक्षेऽनुमाने $x \neq 0$ वा ∞ उपाधिर्भविता। यतो हि-

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ c = 0 \end{array}\right\} \text{यदि} \quad x \neq \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ c \neq 0 \end{array}\right\} \text{यदि} \quad x \neq 0$$

एतेनेदम् अवगम्यते, यद् यत् सापेक्षाम् अन्वय-व्यतिरेकौ अधीयेते, सःभौतिक-राशिः, तत्रोपाधिराशिश्च इत्युभौ अपि उपाधित्व -व्यपदेशे विलोमनीयौ भवत इति।

उदाहरणार्थम्- आर्द्रेन्धनादिमत्त्व-सापेक्षं धूमवत्त्वे वह्निमत्त्वम् उपाधिः। अर्थात् पर्वतो धूमवान् इत्यत्र वह्निमत्त्वम् उपाधिः।

अतो वह्निमत्त्व-सापेक्षं धूमवत्त्वे आर्द्रेन्धनादिवत्त्वम् उपाधिः विद्यते इति। यथा तप्ताऽयोगोलके वह्निसत्त्वेऽपि धूमाभावः।

यदि 'y'-विषये x_1 सापेक्षम् अनुमीयते। तत्र च $x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots\ldots x_n \neq 0, \infty$ उपाधि-जातं भवेत्, तदा पूर्व -प्रमेय-साधारणी-करणेन-

$$y = x_1, x_2 \ldots\ldots. x_n = \prod_{r=1}^{n}(x_r)$$

[अत्र II चिह्नं तदन्तर्गतानां विविध-'r'-मूल्य-लब्धानां राशीनां गुणन-फलं सूचयति] अत्रापि विलोमन-प्रमेयं प्रवर्तत एव। x_r एषां कस्यचनापि सापेक्षम् अध्ययने इतरे $x_i = 0, \infty$ उपाधयः स्युरिति स्पष्टम् एव।

ख) अनुमान-प्रमाणं तु वस्तुतो गुणानुवाद (Qualitative) -मात्र-मूलकम्। गणितं तु व्यापकम्। वस्तुतो गणितं तु बहुविध -तर्कानुप्राणितम् अनुमानस्य सुष्ठु व्यवस्थितं रूपं विद्यते इति। एनम् एवाभिप्रायं विशकलयितुम् अनुमान-पद्धत्याः क्षेत्रस्य सीमितत्वं च दर्शयितुं, कतिपयानि उदाहरणानि अधस्ताद् निदर्श्यन्ते। एभिः उदाहरणैः गणितानुमानयोः सम्बन्धम् अपि स्पष्टीकर्तु प्रयतिष्यते-

ते घटकाः ये खलु कस्यचन भौतिक-राशेः उपजीविनः स्युः, ते तस्योपाधि-रूपाः भवन्तीति। उदाहरणानि इत्थं दातुं शक्यन्ते। तथाहि-

(1) यदि किञ्चन गेन्दुकं 'm'-द्रव्यमानम् आवहेत्, तदाऽत्र प्रयुज्यमानं बलं द्रव्यमानाऽनुपाति भवति।

$$\therefore f \propto m$$

बृहद् गेन्दुकम् अवरोद्धुम् अधिकं बलम् अपेक्ष्यत इति बालाः अपि जानन्ति। किञ्च बलं गति-वृद्ध्यनुपाति अपि भवति। अतोऽत्र गतिवृद्धिः $a \neq 0$ उपाधिः अस्ति।

$$\because f = c \times a \times m$$

ऐकक-विशेष-स्वीकारेण स्थिरांकः $c = 1$

$$\because\ f = a \times m$$

(2) भू-स्थलात् चन्द्र-बिम्बम् अल्प-व्यासं प्रतीयते। यदि तत्-समीपं गम्येत, तदा तद् बिम्बम् अधिकं दृश्यते। अतो बिम्बमानम् अधिकम् इति अनुमितिः। गणितीयाः सिद्धान्तास्तु लम्बनं (Parallax) परिभाष्य चन्द्रस्य व्यासम् अपि साधयितुं क्षमन्ते। अत्र केवलम् अनुमानेनैव कार्यं न सेत्स्यति, इत्यवधेयम्।

(3) सौर-परिवाराऽन्तर्गतानां ग्रहाणां कृते-

$$\frac{(\text{ग्रह-भगणः})^2}{(\text{ग्रह-मन्दकर्णः})^3} = \frac{4\Pi^2\,(Te)^2}{(Re)^3\,(\text{आकर्षण-स्थिरांकः}) \times \text{सूर्य-द्रव्यमानम्}}$$

यत्र $Te =$ पृथ्वी-भगणः, $Re =$ पृथ्वी-सूर्ययोरन्तरम्।

पृथिवी-भौम-गुरु-शन्यादि-ग्रहाणां केन्द्रगं सूर्यम् अभितो भ्रमतां, कृते एष राशिः स्थिरांक एव परं चन्द्रमसः कृते एष राशिः तत्तुल्यो न लब्धः, अतो गति-विज्ञान-दृष्टया चन्द्र-कक्षा-केन्द्रगं पिण्डं सूर्यो न विद्यते इति गणितानुप्राणितम् अनुमानम्। यदि सूर्य-द्रव्य-मान-स्थाने पृथ्वी-द्रव्यमानम् उत्थाप्येत, तदा तु अस्य मानं (गणितागतम्) चन्द्रमसः कृते वेधोपलब्धेन मानेन तुल्यं लभ्यते, अतः चन्द्र-कक्षा-केन्द्रगं पिण्डं तु पृथ्वी एव न तु सूर्यः इति आकर्षण-सिद्धान्तेन स्पष्टीभवति। तथा चैवम् आकर्षण-सिद्धान्त-गति-विज्ञानाभ्यां सिध्यति यत् चन्द्रो भुवं परितो भ्रमतीति। अत्राऽनुमानं गणित-मूलकम्। अत एवात्यधिकं महत्त्वं बिभर्ति।

(4) वैद्युतीधारा (Electric Current) विभव - (Potential) वृद्ध्या वर्धते। अत्रानयोः भौतिक - राश्योः परस्परम् एकरेखीयः सम्बन्धोऽनुमीयते। अर्थात्-

विद्युद्-धारा 'I' $\propto$ 'V' विभवः

$\because I = cV$ (यत्र $c =$ सुचालकता)

प्रतिरोध-वृद्ध्या I - मानं क्षीयते, इति तु प्रयोगैः ज्ञायते। अतः अत्र व्यस्त-त्रैराशिक-नियम-प्रवृत्तिः।

$c = 1/r$

यत्र $r =$ प्रतिरोधः (Resistance)

(5) अभिसन्धीयतां समीकरणम्-

$$x\left(x^2 - 1\right) = y$$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ व्यतिरेकः

$\left.\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array}\right\}$ अत्र अन्यवे $x \neq \pm 1$ इति उपाधिः।

यतो हि-यदि $x(x^2 - 1) \neq 0$

$\because x \neq \mp 1$

एतम् उपाधिं तु गणितज्ञ एव प्रतीयात्।

एवं अत्र सोपाधिक-हेत्वाभासस्य गणितेन सह सम्बन्धः स्पष्टीभवति।

(6) यदि च 'y, x' अनयोः सम्बन्धो निम्नलिखितः स्यात्

$x\left(x^2 + 1\right) = y$ तदा

$$x \neq 0 \qquad (\text{अत्र} \quad x = \mp\sqrt{-1} \quad \text{उपाधिः})$$
$$y \neq 0$$

एष काल्पनिक-संख्या-रूपः उपाधिः गणित-परिभाषितः एव। गणितस्यावलम्बं विना अस्य ज्ञानं न सम्भवति।

(7) अनुमान-सम्बन्धिनी पद्धतिः सीमितैव विद्यते। समजात्य त्रिभुजे कर्ण-कोटि-भुजानां सम्बन्धः, अन्ये च गणित-साध्याः सारणिक-समीकरणादि-परिणामाः (Determinantal Eigen-value Equations) साधारणाऽनुमान-पद्धत्या न साधयितुं शक्याः। n-विमितिके ($n \geq 3$) पराकाशे (Configuration space) प्रयुज्यमानाः गणितीय-परिणामाः भौतिकेन जगता सम्बद्धाः सिद्धान्ताः अनुमानाध ारभूत-हेत्वादिभिः न सुसाधाः। काल-सापेक्षता-सिद्धिः अपि गणितेनैव सुष्ठुतया अध्येतुं शक्या। पोइस्सन- कोष्ठकादि-साहाय्येन सिद्धाः कान्तम-यान्त्रिकयुपयुज्यमानाः परिणामाः अनुमान-मात्र-साहाय्येन साधयितुं न शक्यन्ते। एवं चाऽनुमानस्य क्षेत्रं सीमितम् इति स्पष्टं जायते। अत्र पञ्चषाण्येवोदाहरणानि प्रस्तुतानि। अन्यानि अपि बहूनि उदाहरणानि प्रस्तोतुं शक्यन्ते, येषु अनुमान-पद्धतिः कार्यं निर्वोढुं न प्रभवतीति। गणितेन बहवो विलक्षणाः परिणामाः नैयायिक-मत-विरूद्धाः सिध्यन्ति, ते च अद्यत्वे प्रयोगैः अपि सत्यापिताः। कतिचन ईदृशाः परिणामाः अधस्ताद् विविच्यन्ते-

(8) नैयायिक-मतानुसारं भार-भारवतोः समवाय-सम्बन्धो भवति। परं भारस्तु पृथिव्याकर्षणाद् एवानुभूयत इति वैज्ञानिकानां मतम्। भुवि कस्यापि वस्तुनो भारस्तु पृथिव्याकर्षण-बलम् एव।

तथा च-

भारः = द्रव्यमानम् × स्थिरांकः इति नैयायिकस्य प्रतीतिः।

यत्र यत्र द्रव्यमानं, तत्र तत्र भार इति प्रतीतिः गणित-प्रयोगम् अन्तरा स्वाभाविकी एव। वस्तुतस्तु आकर्षण-स्थिरांकोऽपि पृथ्वीतः अन्तरेण क्षीयते। अतो भारस्य भारवतश्च समवाय-सम्बन्ध-प्रतिपादकेऽनुमाने आकर्षक-पिण्डादि-सामीप्यम् उपाधिः। एतत् तथ्यं तु आकाशे राकेटादि-साहाय्येन गतानाम् अन्तरिक्ष-यात्रिणाम् अनुभवेनापि पुष्टम्। समाकलन गणित-साहाय्येन प्रक्षेप्यस्याकर्ष-विमोचन-गतिः . अपि (Escape velocity) साधयितुं शक्यते। यदि एतया गत्या पिण्डम् ऊर्ध्वं क्षिप्यते, तदा तत्पिण्डं पुनः पृथ्वीं नैव आयायात्। एतत् तथ्यम् अपि अत्र दर्शितस्योपाध ेः सत्तां द्रढयति।

एवम् भार-भारवतोः समवाय-सम्बन्धः प्रत्याख्यातः गणितज्ञैः वैज्ञानिकैः। श्री भारस्कराचार्येण भुवः आकर्षणशक्तिः तस्याः गोलाकृतिकत्वेन तथा च आकाशस्य दिङ्-निरपेक्षत्वेन अनुमिता। परम् एताभ्यां हेतुभ्यां भार-भारिणोः समवाय सम्बन्धस्तु नैव प्रत्याख्यातः अजायत इति बोध्यम्।

(9) अभिसन्धीयतां समीकरणम्-

$$y = x(a - k)$$

यदि $x = 0$

$$y = 0$$

यदि $x \neq 0$

$y \neq 0$ (यदि $a \neq k$ उपाधिः)

अतः अत्र अन्वये '$a \neq k$' उपाधिः अस्ति। एष उपाधिः गणितेनैव साधयितुं शक्यः।

(10) कोणीयः संवेगः = स्थिति-दिष्टम् × रेखीयः संवेगः

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(अत्र × चिह्नम् दिष्ट-गुणनं सूचयति)

अत्र यदि $r = 0, l = 0$

$r \neq 0, l \neq 0$ यदि $p \neq 0$ तथा च r, p दिष्टयोः म ध्यगतः कोणः $\neq 0$ अतोऽत्र द्वौ उपाधी स्तः।

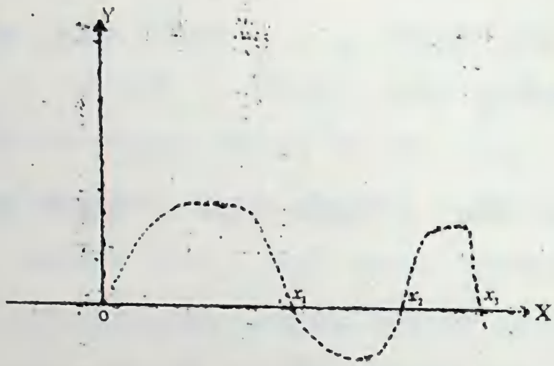
(11) अभिसन्धीयतां समीकरणम्-

$$x^2 - 2xy + y^2 = f(x,y)$$

$$x, y = 0, f = 0$$

यदि $x, y \neq 0$ परम् $f = 0$ अत्रोपाधिस्तु $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ अस्य समीकरणस्याऽवमूलनेन सुसाधः। अर्थात् $x \neq y$ उपाधिः अस्तीति।

(12) यदि $f(x) = y$, अत्राऽन्वय-व्यतिरेकयोः साहाय्येन x,y सम्बन्ध-ज्ञाने प्रयस्यमाने उपाधयः सिषाधयिषिताः स्युः, तदा प्रयोगैः गणितीय-सिद्धान्तैः लब्ध आलेखः (Graph) भृशं साहाय्यं जनयति। तथाहि-$f(x)$अस्यालेखः चेत् निम्ननिर्दिष्टविधः स्यात्-



$y = f(x)$

एतत् वक्रम् अभीप्सा-कल्पितम्

तदा $f(x) = 0$ अत्रावमूलनानि तु $x = 0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ सन्ति। अतः $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, अत्र तु $x = x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ इत्यादय उपाधयः स्युः इति गणितविदां स्पष्टम् एव। साधारणनुमान-हेत्वाभासादि-विषयैते उपाधयो नेषत्कराः ज्ञातुम्। एको द्वौ त्रयो वा उपाधयः स्युर् इति नैयायिकोऽनुमिमीते, परन्तु गणितज्ञोऽन्यान् अपि सर्वान् उपाधीन् दर्शयितुम् अलम्। एवं चानुमान-पद्धतेः सीमितत्वं स्पष्टम् एवेति।

ग) उपमान-प्रमाणम्, गणितं च

उपमान-प्रमाणं तु अनुमान प्रमाणाद् निम्नस्तरीयम् इति नात्र सन्देहः। परम् उपमान-साहाय्येन कतिपये यान्त्रिकीयाः वैद्युताः चुम्बकीयाश्च सिद्धान्ताः व्यापकीकृत-पद्धत्या विश्लेष्टुं शक्यन्ते। एवं च गणिते प्रयत्न-लाघवं जायते, येन विविधानां गणितीय शास्त्राणां समस्याः औपम्य-तर्कैरपि समाधातुं शक्यन्ते।

आयुर्वेदः तथा च भौतिकी-रासायनिकी-शास्त्रेषु परमाणूनां स्पैक्ट्रमादि प्रयोगाः कणाद-दर्शनस्य विशेष-पदार्थ-प्रपञ्च एव, परम् गणितं विश्लेषणे भृशं सहायते इतिनात्र संशीति-लेशः।

घ) सांख्य-वेदान्त-जैन-दर्शनावधारणाः गणितं च

सूक्ष्म-जगतः स्थिति-गतिनियमाः यदि औपम्य-माध्यमेनैव विश्लेष्येरन् तदा भ्रान्तिपूर्णाः धारणाः उद्भवेयुः इति वैज्ञानिकानाम् अभिमतम्। तत्र तु सम्भावना-सिद्धान्ताः अनिवार्याः, अनिश्चितता राद्धान्तः एव च शरणम्। वस्तुतस्तु सूक्ष्म जगतः प्रक्रियाणाम् अध्ययने एतासां सर्वासां तर्क-शाखानाम् अप्रतिनिष्ठानम् एव इति मन्वते विज्ञान-निष्णाताः दार्शनिकाः। तत्र जैनानां स्याद्वादस्य तथा च सांख्यवेदान्तादिदर्शनानामेव प्रतिष्ठा आशास्यते। अत्र तर्कस्य तु अप्रतिष्ठानम् एव।

आधुनिकाः परमाणुवाद-सिद्धान्ताः अणोः कृतेः स्थूलस्य सौर-परिवार-जगतः प्रतिरूपं परिकल्प्यैव क्वान्टमीकरण-विधिना परिष्कृत्य विकासमापिताः इति उपमान-प्रमाणं परिष्कृतं सदेव प्रवर्तते नान्यथा। अत एव एतत् नैव प्रकृष्टं प्रमाणम् अपि तु "उपप्रमाणम्" उपमानम् इति।

अद्यत्वे उत्पाद-ध्रौव्य-विनाश-धारणाः तथा च वेदान्त-प्रतिपादिताः दार्शनिक्यः अवधारणाः वैज्ञानिकैः सत्याप्यन्ते। किञ्च वैज्ञानिक-परिभाषितं (भार-रहितं) द्रव्यम् ऊर्जात्मक मेव इति $(E = m_0c^2)$ एतत् तथ्यम् अपि गणितेनैव सुसाध्यम्।

$$E = \int_0^c m_0 \gamma \frac{dv}{dt} dx = m_0 c^2$$

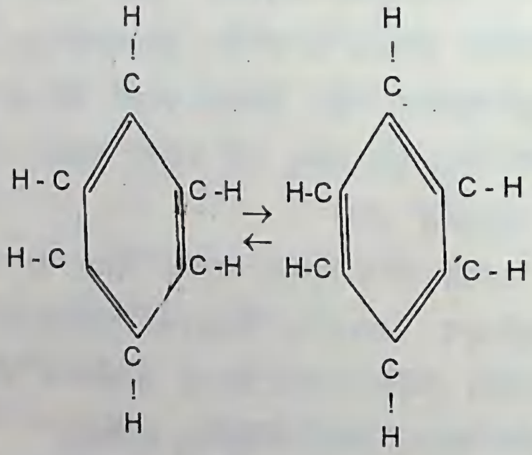
(विलोक्यताम् मम लेखः "पदार्थ-शक्त्योरभेदः" परिशिष्टम् 1)

यत्र $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

एतत् सर्वं पदार्थ-शक्त्योः अभेदः इति शीर्षकेण 'विश्व-संस्कृतम्' पत्रिकायाम् 1965 ख्रीस्ताब्दे प्राकाश्यत।

त्रिवृत्करण-पञ्चीकरणादि-धारणासु पूर्वमपि गणित-प्रयोगाः अक्रियन्त। परम् अद्यत्वे भृशं विकसितस्य गणितस्य उपयोगाः महत्त्वपूर्णान् परिणामान् ददति इति बोध्यम्।

वैज्ञानिक-भाषायां जैन-सम्मत-सप्तभंगी-न्यायस्य व्यवस्थापना सुसंगता। उदाहरणार्थम्- बैंजीन-विचक्रे(Benzene Ring)द्विविधस्य कार्बन-हाईड्रोजन-बन्धस्य विमोचन-विबन्धन-प्रक्रियाभ्याम् एतत् विचक्रं विबद्धं (पिनद्धं) न वा ? "इति प्रश्ने सप्तकोटिकः तर्क एव युज्यते इति तत्र विरुद्ध-धर्म-समन्वये नैव कश्चनापि वितर्कः !



बैंजीन-विचक्रे वैलेन्सी-विबन्ध-दोलित्रस्य आवृत्ति-संख्या कोटिभ्योऽपि अधिका। अतः दोलन-स्थितिः अनिर्वचनीय-शब्देनैव वर्णनीयतया आपद्यते इति।

अनिश्चितता-राद्धान्तानुसारं (Uncertainty Principle) गणितेन एतत् सिध्यति यत् बैन्जीन विचक्रस्य वैलेन्सी-बन्धौ प्रति सैकिन्डं कोट्यधिकवारम् (अ) पिमुच्येते * (अ) पिनह्येते च इति अनिर्वचनीया एषा स्थितिः, वक्तुः उच्चारणे विबन्ध-दोलित्रस्य कोट्यधिकावृत्तिकत्वात् अतः एव च उच्चारण-कालेन असमन्वयात् इत्यलं विस्तृत-विवेचनैः।

इलैक्ट्रोनस्य दृढ-रूप-स्वीकारेऽपि तस्य आभ्यन्तर भ्रमिरपि प्रेतिसैकिन्डम् कोट्यधिकाम् आवृत्तिम् आवहति इति गणितेन सिद्ध्यति इत्याश्चर्यम्! अत्र अधीयानाः स्वयमेव गणितेन परीक्षेरन्। एवं सप्तभंगी न्यायभाषा एव युज्यते इति।

एतेषां दर्शनानाम् गणित-विधाभिः उपस्थापनाः वैज्ञानिक दर्शन - क्षेत्रेषु क्रान्ति - कराः स्युरिति मन्ये। त्रिवृत्करण - सम्बन्धिनः तथा च पञ्चतन्मात्राणां पञ्चीकरण - प्रक्रियाभिः महाभूतानाम् उत्पत्ति-विषयकाश्च अनुसंधान - निबन्धाः "तुलसीप्रज्ञा" पत्रिकायाम् तथा च मन्निर्देशने आर्युवेदीय - चरक - वैशेषिक - सिद्धान्ताः पी॰एच॰डी॰ छात्र - शोधनिबन्धेषु प्रकाशितचराः इति तत्रैव द्रष्टव्याः इति शम्।

* अत्र प्रक्रिययोः स्वाभाविकत्वात् कर्म-कर्तरि प्रयोगः। मुच्-नह्-धातुभ्याम् सह "अपि"-उपसर्गस्य भागुरि-सम्मतः अकार-लोपः। अस्य उपसर्गस्य प्रयोगः उभयोः प्रक्रिययोः यौगपद्येन प्रवृत्ती अभिव्यनक्ति। "अपि" अव्ययस्य वा प्रयोगो बोध्यः। एष अपि उभयोः प्रक्रिययोः यौगपद्यम् द्योतयति इति।

परिशिष्टम्

पदार्थ[1]-शक्त्योर् अभेदः

शक्तिधरशर्मा*

अस्माकं दर्शन-शास्त्रे तन्मात्राणां भूतानाम् च क्रमिको विकासः प्रदर्शितः। एवम् च दार्शनिक-मताऽनुसारं भूतानाम् उत्तरोत्तरम् अन्तर्भाव-स्वीकारात् तेजो-ध्वन्यादि-शक्तीनां पृथिव्यादेर् मूर्तिमतः पदार्थ-जातस्य च न किम् अप्य् अन्तरम्। ध्वनि-प्रकाशाऽऽदि-शक्तीनां पदार्थ-द्रव्य-मानात्मकस्य चाऽभेदः सापेक्षवादाऽनुसारं गणितेन सिध्यति, इतीह दर्श्यते —

गणित-प्रयोगात् पूर्वं शक्तेर् एककम् (Unit) अर्गं परिभाषामहे—अर्गस् तु तावत् कार्यं (शक्तिर् वा) यद् एक-डाइन-मित-बल-प्रयोगेण प्रयोग-बिन्दोर् आरम्भस्थात् एक-सैन्टीमीटर-तुल्याऽन्तर-प्रतिपादनेऽनुष्ठितं भवति। एको डाइनस् तु तावद् बलं यद् एक-ग्राम-मित-द्रव्य-माने प्रयुज्यमानं सद् एक-सैन्टीमीटर/सैकण्ड[2] तुल्यां गति-वृद्धिं जनयति।

गणित-रीत्या—

$$\text{बलम्} = \text{द्रव्यमानम्} \times \text{गति-वृद्धिः},$$

$$\text{वा,} \qquad \text{ब} = \text{द} \times \text{ग. वृ.} \; \ldots \ldots \ldots \; (१)$$

$$\text{यदि द} = १ \text{ग्रामम्}$$

$$\text{ग. वृ} = १ \text{ सैं. मी./सैकिं}^{२}.$$

$$\text{तदा बलम्} = १ \text{ डाइनः}$$

$$\text{शक्तिः} = \text{बलम्} \times \text{बल-प्रयोग-जनितम् अन्तरम्।}$$

$$\text{वा,} \qquad \text{श} = \text{ब} \times \text{अ} \; \ldots \ldots \ldots \; (२)\text{ क.}$$

$$\text{यदि ब} = १ \text{ डाइनः},$$

---

१. अस्मिन् लेखे पदार्थ-शब्देन न्याय-परिभाषितोऽर्थो न गृहीतः, अपि तु वैज्ञानिकाऽनुमतो मूर्त-द्रव्य-रूपः (Matter) अर्थ एव स्वीकृत इति बोध्यम्।

*शास्त्री, सिद्धान्तज्यौतिषाचार्यः, M.Sc. (Physics) 'मार्तण्ड भवन' कुराली (अम्बाला)।

अ = १ सें. मी.

तदा श = १ अर्गः

$१०^{७}$ अर्गाः = १ जूलः,

$$\text{सामर्थ्यम्} = \frac{\text{शक्तिः}}{\text{कार्याऽनुष्ठान-समयः}}$$

$$\text{वा, सा} = \frac{\text{श}}{\text{स}} \quad \dots\dots\dots \text{२ (ख)}$$

यदि श = १ जूलः, स = १ सैकिण्डः,

तदा सा = १ वाटः

अश्व-सामर्थ्यम् = १४६ वाटाः

एतत् तु स्पष्टम् एव यत्—

वाट-सैकिण्डः = १जूलः = $१०^{७}$ अर्गाः ।

१ किलोवाट-अवरः = $१०^{३} \times १०^{७} \times ६० \times ६०$ अर्गाः

= ३६×१०^{१२} अर्गाः ।

∴ वैद्युत-शक्तेर् एककम् = ३६×१०^{१२} अर्गाः ।

(Unit of electrical energy)

एवम् च चुम्बक-ध्वन्यादि-शक्तयोऽपि 'अर्ग'-मानेन मीयन्ते । प्रकाशस तरङ्गैर् एव प्रसरतीति वैज्ञानिकैर् गणित-साहाय्येन प्रयोगैश्च च संसाधितम् । तत्र —

प्रकाश-शक्तिः = स्थि × कम्पनाङ्कः ... ... (४)

स्थि = स्थिर-संख्या = ६.६२५×१०^{-२७} अर्ग-सैकिं०

परम्, प्रकाश-गतिः = क = कम्पनाङ्कः × तरङ्गदैर्घ्यम् ।

वा क = न × ल ...... (३)

यत्र, क = प्रकाशगतिः

न = कम्पनाङ्कः (Frequency)

ल = तरङ्ग-दैर्घ्यम्,

(४) सूत्रेण, न = क/ल, सूत्रम् (३) उत्थाप्य जातम् —

$$\text{श} = \text{स्थि} \times \frac{\text{क}}{\text{ल}} = \frac{६.६२५ \times १०^{-२७} \times ३ \times १०^{१०}}{\text{ल}}$$

$$= \frac{१९.८७५ \times १०^{-१७}}{\text{ल}} \text{ अर्गाः} \quad \dots\dots\dots (५)$$

मध्यम-मानेन दृश्य-प्रकाश-तरङ्ग-दैर्घ्यम् = ६००० अंगस्ट्राभाः

$= ६०००\times१०^{-८}$ सेन्टीमीटराः $= ६\times१०^{-५}$ सें. मी. = ल,

(५) सूत्रे उत्थाप्य—

दृश्य-प्रकाशस्यैक-तरङ्गेण संगता शक्तिः $= \dfrac{१९.८७५\times१०^{-१०}}{६\times१०^{-५}}$ अर्गाः

$= ३.३१२५\times१०^{-१२}$ अर्गाः ।

एवम् च प्राकृतिक-शक्तीनां सर्वासां परस्परां सम्बन्धः स्पष्टीभवति ।

विविधानां शक्ति-रूपाणाम् एक-रूपत्वं गणितेन प्रदर्श्य द्रव्य-मात्रायाः शक्तेश् च परस्परां सम्बन्ध-सिपाधयिषया एकं गणितसिद्धं विशिष्टं समीकरणम् उपस्थाप्यते—

कल्प्यते—'द्वे सर्वथा तुल्ये पिण्डे, एकस्मिन् धरातले अन्योन्यम् आघातं जनयतः' इति । यदि आघात-घटना आघात-सापेक्षां गतिम् आवहति, अन्यस्मिन् कस्मिंश्चन धरातले तिष्ठता केनचन प्रत्येत्रा अधीयते, तदा तु 'आवेगस्य शाश्वतत्व' सिद्धान्तानुसारं लारेन्ट्जीय-नियामकान्तरण-पद्धत्या निम्नं सूत्रम् अवतरति—

$$द = \frac{द_०}{\sqrt{१ - \frac{ग^२}{क^२}}} \quad \dots\dots (६)$$

यत्र द० = शून्य-गति-स्थितौ द्रव्य-मात्रा ।

द = ग-गति स्थितौ द्रव्य-मात्रा ।

क = शून्यके प्रकाश-गतिः $= ३\times१०^{१०}$ से. मी./सेकं,

साधरण-जीवने ग $<<<$ क अतः द $\rightleftharpoons$ द० एवम् च द्रव्य-मात्रान्तरं गति-जन्यं, प्रत्येतुर् अनुभव-गम्यं न भवति । कल्प्यते— द द्रव्यमान-युतः पदार्थः केनचन बलेन तयाऽऽकृष्यते, यथाऽस्य गतिर् अधिका स्याद् इति । एतादृश्यां स्थितौ द्रव्य-मात्रा (६) सूत्रानुसारं वर्धिष्यते, इति तु स्पष्टम् एव । अधुना एतस्या द्रव्य-मात्रायाः अधिकतया प्रथम-बल-प्रयोग-तुल्य-गति-वृद्धि-प्रतिपत्त्यर्थम् अधिकं बलम् अपेक्षितम्, अन्यथा तु द्रव्यमात्राया वृद्धेर् गति-ह्रासः संजनिष्यते । यथैव गतिर् वर्धते, द्रव्य-मात्रा-स्फीतिर् जायते, बलं चाधिकाऽधिकम् अपेक्षितं भवति । सापेक्षवादानुसारं कस्याऽपि पदार्थस्य प्रकाश-गति-तुल्या गतिर् न भवितुम् अर्हति । एवम् च प्रकाश-गति-तुल्य-गति-प्रतिपादने कीदृशी स्थितिर् भवेद् इति विमृश्यते —

यथैव गतिर् वर्धते, द्रव्य-मात्रा गतिज-शक्ति-रूपे परिणता जायते। प्रकाश-तुल्य-गतौ तु सर्वं द्रव्यमानं गतिज-शक्तिरूपं भवेद् इति तु स्पष्टम् एव।

यदि, कस्मिंश् चन क्षणे गतिः = ग

अन्तरम् उल्लंघितम् = अ

आरम्भ-क्षणाद् व्यतीतः समयः = स

$$\text{तदा,}\quad \frac{\text{ता ग}}{\text{ता स}} = \text{गति-वृद्धिः} \quad \cdots\cdots(७)$$

$$\text{तथा}\quad \text{ग} = \frac{\text{ता अ}}{\text{ता स}} \quad \cdots\cdots(८)$$

$$\text{अस्मिन् क्षणे प्रयुज्यमानं बलम्} = \text{द} \times \frac{\text{ता ग}}{\text{ता स}}$$

[(१) सूत्रानुसारम्]

'ता अ' तुल्यान्तर-प्रतिपादनेऽनुष्ठितं कार्यम् = ता, श,

$$= \text{द} \times \frac{\text{ता ग}}{\text{ता स}} \times \text{ता अ} \quad [\,(२)\text{ क सूत्रानुसारम्}\,] \cdots(९)$$

यदि समीकरणं (९) ग= ० : एवं ग= स

इति सीमा-द्वयान्तरे अनुकल्प्येत, तदा तु प्रकाश-गति-तुल्यगति-प्रतिपादने अनुष्ठितं कार्यं शक्तिर् वा = द-द्रव्यमाने सन्निहिता शक्तिः =

$$= \int_{0}^{\text{श}} \text{ता श} = \int_{0}^{\text{क}} \text{द} \times \frac{\text{ता ग}}{\text{ता स}} \text{ ता अ}$$

वा

$$\text{श} = \int_{0}^{\text{क}} \frac{\text{द}_0}{\sqrt{1-\frac{\text{ग}^2}{\text{क}^2}}} \frac{\text{ता अ}}{\text{ता स}} \text{ ता ग}$$

$$= \int_{0}^{\text{क}} \frac{\text{द}_0 \text{ ग ता ग}}{\sqrt{1-\frac{\text{ग}^2}{\text{क}^2}}}$$

$$\text{निरस्यते}- \frac{\text{ग}}{\text{क}} = \text{प} \quad \therefore \text{ग} = \text{क प}$$

$\therefore$ ता ग = क ता प यदा ग = ०, तदा प = ०

तथा च यदा ग = क तदा प = १

$$\therefore\ श = द_० \int_०^१ \frac{क\,प'\ क\ ता\ प}{\sqrt{१ - प^२}}$$

$$= द_०\, क^२ \int_०^१ \frac{प\ ता\ प}{\sqrt{१ - प^२}}$$

$$= \frac{-द_०\, क^२}{२} \int_०^१ \frac{-२प\ ता\ प}{\sqrt{१ - प^२}}$$

$$= \frac{-द_०\, क^२}{२} \left[+ \frac{(१ - प^२)^{१/२}}{१/२} \right]_०^१$$

$$= \frac{-द_०\, क^२}{२} \{-२\} = द_०\, क^२$$

$$\therefore\ \boxed{श = द_०\, क^२} \quad \dots\ \dots\ \dots\ (१०)$$

एतत् सूत्रं तु 'पदार्थ-शक्त्योः सेतु-सम्बन्धः' इति व्यपदिश्यते । शक्तिः कियती मात्रा कियत्या द्रव्य-मात्रया तुल्या इत्य् एतत् तु अनेन सूत्रेण साधितं भवति ।

उदाहरणार्थम् — यदि $द_० = १$ ग्रामम्

$श = १ \times (३\times१०^{१०})^२$

$= ९\times१०^{२०}$ अर्गाः,

$= \dfrac{९\times१०^{२०}}{३६\times१०^{१२}}$ किलोवाट-भवराः,

$= ०\cdot२५\times१०^{८}$ किलोवाट-भवराः,

एवम् च,

१ ग्राम-तुल्य-द्रव्यमात्रा = ·२५×१०^{८} वैद्युतशक्तेर् ऐककानि।

किञ् च, मध्यम-मानेन दृश्यमान-प्रकाशस्य एकस्मिन् तरङ्गे शक्तिमानम्

= ३·३१२५×१०$^{-१२}$ अर्गाः (पूर्वं साधितम्)।

तथा च, १ ग्रामम् = ९×१०^{२०} अर्गाः

∴ मध्यम-मानेन दृश्यमान-प्रकाशस्य एकस्मिन्

तरङ्गे शक्तिमानम् = $\frac{१}{९×१०^{२०}}$ × ३·३१२५×१०$^{-१२}$ ग्रामाणि।

= ०·३६८०५×१०$^{-३२}$ ग्रामाणि।

'एवञ् च प्रकाश-शक्तेर् अपि द्रव्य-मात्रा-रूपत्वात् प्रकाश-किरणा आकर्षणेन प्रभाविता भवन्ति।' इति गणितेन सिध्यति। सैद्धान्तिक-रीत्या तारकाभ्यः समागच्छतां प्रकाश-किरणानां सूर्यस्य आकर्षणेन जन्यो दिक्-परिवृत्ति-कोणो गणित-वेतृभिः साधितः। एतावान् एव कोणश् च वेध-क्रियया प्रत्यक्षम् उपलभ्यते, इत्येषा गणिताऽनुसारिणी उपलब्धिस् तु पूर्वं प्रतिपादितं सिद्धान्तं सत्यापयति। एवञ् च ऊष्म-प्रकाश-ध्वनि-विद्युच्-चुम्बक-नाभिकीयाऽऽदि-शक्ति-जातस्य पदार्थ-द्रव्यमात्रायाश् चाऽन्योन्यां सम्बन्धं संसाध्य गणितज्ञा वैज्ञानिकाः पदार्थानां द्रव्य-मात्रास्व् अपि विवक्षितासु शक्तेर् ऐककान्य् एव प्रयुञ्जते। एष खलु वैज्ञानिकानां साधरणो वाग्-व्यवहारः। एष एव पदार्थ-शक्त्योर् अभेद आस्माकीनानां भारतीयानां दार्शनिकानाम् अभिमत आसीत्, परम्—सेतु-सम्बन्ध-साधनार्थं न कोऽपि प्रायस्यत् इति तु स्वीकार्यम् एव। भौतिक-शास्त्रे त्व् एतत् समीकरणम् अत्यधिकं महत्त्वं बिभर्ति। यौगिकीषु अध्यात्म-क्रियासु ज्ञान-रागाणां मुनीनाम् एतादृश-समीकरण-साधने रुचिर् एव कथं जायेत! इमे विषयास् तु तेषां कृते उपेक्ष्या एवेति मन्ये।

प्रयुक्त-वैज्ञानिकशब्दावली

क्वान्तम-यान्त्रिकी	Quantum Mechanics
अभीषा-कल्पितम्	Arbitrarily selected
विमा	Dimension
द्विविमाकम्	Two dimensional
त्रिविमाकम्	Three-dimensional
चलम्	Variable
परामितिचलम्	Parametric Variable
अभ्याकाशम् (पराकाशम्)	Multidimentional Space
सांख्यिकी	Statistics
व्यञ्जकम्	Expression
संख्या सिद्धान्तः	Theory of Numbers
अंकाभिकलनम्	Numarical Analysis
आवर्तसंख्या	Frequency
असकृत्कर्म	Iteration
गुणानुवादः	Qualitative Description
तरंगः	Wave
तंरगिका	Wavelet
अपिमोचः (पिमोचः)	Disjunction (of bonds)
अपिनाहः (पिनाहः)	Conjuction (of bonds)
पदार्थः (नैव न्याय-दर्शन-परिभाषितः)	Matter
शक्तिः	Energy
प्रमेयम्	Lemma

समीकरणस्य आलापनम्	Satisfying an equation
अवश्यालाप्यम्	To be satisfied (unavoidably)
समाकलनम्*	Integration
घूर्णः	Moment
द्विध्रुवघूर्ण	Dipole Moment
चतुर्ध्रुवघूर्णः	Quadrupole moment
षोडशध्रुवधूर्णः	Hexadecapole Moment
आभ्यन्तरः घूर्णः	Intrinsic Spin
फलनम्	Function
विजनितता	Degeneracy
वैलेंसी	Valency
न्युट्रोनः	Neutron
प्रोटोनः	Proton
इलैक्ट्रोनः	Electron
नाभिकम्	Nucleus
भ्रमिबन्धः	Rotational Band
बन्ध–शीर्षम्	Band Head
वल्ली–विकोचः(आकुञ्चनं वा)	Contracting the Vallī
वल्ली–उद्वलनम्	Generating the Vallī
नियमितता	Systematics
करणसूत्रम्	Algorithm
निरोधः	Constraint

* *सुधाकरद्विवेदि–प्रभृतिभिः विद्वद्भिः 'अनुकलन' शब्दः प्रयुक्तः परन्तु समाकलन शब्दः एव गणितीय–परिभाषानुकूलः प्रतीयते इति विवेकः।*

कतिपये संदर्भ-ग्रंथाः

1) आचार्य-आर्यभट-कृतम् "आर्यभटीयम्" (499 A.D.)।

2) आचार्य-ब्रह्मगुप्त-विरचितः "ब्रह्मस्फुट-सिद्धान्तः" (6th A.D.)।

3) आचार्य-भास्कर (प्रथम)-विरचितम् "महाभास्करीयम्"(7th A.D.)।

4) आचार्य-भास्कर (द्वितीय)-विरचिते सिद्धान्तशिरोमणौ "बीजगणितम्"(1150 A.D.)।

5) "Analytic theory of continued fractions" by H.S. Well D. Van Nostrand Co. Inc. Ed. 1967.

6) "Elementary theory of numbers" by J.V. Uspensky McGrahill book Co. Inc. N.Y. 1939.

7) "Modern Introduction to ancient Indian mathemetics by T.S. Krishanamurty wile Eastern Co. New Delhi.

8) "Theory of Nuclear moments" by Blin stoyle Oxford Univ. Press 1957.

9) "Theory of Angular momentum" by Rose.

10) "Theory of Angular momentum in quantum mechanics" by Edmond A.R.

11) "Theory of the Nearest Square continued fractions" Ayyangar Krishna Swami, Half yearly journal of Mysore University A1 (1940).

12) "History of theory of numbers" by Dicson L.E.3 Chesle N.Y. 1952 (3 Volumes)

13) "Quadratic forms and Matrices" by N.V. Yefimov, translated by A. Shemitzro, Moscow Univ. Academic Press, Adelphi Univ. Oslow N.Y.

14) "Solved and unsolved problems in theory of numbers by Daniel Shanks Chesle Pub. Co. N.Y.

15) "Exactly solved models in statistical mechanics" by Rodney.J. Baxter. (Department of theoritical Physics Research School of Physical Science, The Australian National University Canberra A.C.T. Australia Academic Press, a subsidory of harcourt Brace Javanovich, publishers. London, New York, Tokyo)

16) "Number theory and its history" by Ostemore of Yale Univ. Math. Deparment.

17) "Mathmetics in China and Japan" by T.L. Heeth.

18) "A.Manual of Greek Math." by T.L. Heeth.

19) "सिद्धान्ततत्त्व-विवेक:" by Kamalakar Bhatta (17th A.D.)

20) "Vedic Mathemetics" by H.H, Shankracharya Sh. Bharatindra ed. by V.S. Aggarwal (B.H.U.)

21) "Ancient Vedic Ganit" by Narinder Puri of civil Eng. Department Roorki University Roorki (U.P.).

विज्ञापनम्

INDIAN MATHEMATICS
ADVANCEMENTS AND APPLICATIONS

By

Dr. S.D. Sharma, Ex.Prof. Physics

Punjabi University, Patiala,

INTRODUCTION

History of Science in general and mathematics in particular, is very important in order to impart relevant information for placing the subject in right perspectives. Besides this, there are also other benefits of studies in history of Science. Some of these are :-

1) The study of evolution of mathematics over many centuries in the past, gives incentives to students and researchers by making them aware of successes and failures of earlier mathematicians in their attempts.

2) Sometimes the old Historical records like those of earthquake studies, Halley comet's returns. Supernovae explosions etc. form indispensible parts of the respective disciplines and whatever information available is used which helps in advancements for conclusions and verifications of mathematical models in Physics.

3) Besides such advantages of these interdisciplinary

studies, the most inportant outcome result is, when any particular ideas or the topics left undeveloped behind, by mathematicians in the past, are developed further and put to use in research.

In fact the developments accomplished till yesterday constitute the history of the subject and the progress ahead of whatever has already been achieved, forms the focus for further developments.

History of mathematics in general and theory of numbers in particular, has the widest range of centuries in the past. The theories of quadratic and higher degree forms, even after so many attempts by great exponents of mathematics in the past centuries, (since few millennium B. C.) have so many unsolved puzzles (Refer "Solved and unsolved problems in theory of numbers" by Daniel Shanks). The Author while a student of mathematics and Siddhanta Jyotisha (Astronomy). in traditional school of Varanasi, developed keen interest for further advancements of Indian mathematical techniques to make the relevant algorithms useful for science and engineering problems. Especially the subject of Indian binary patterns (द्विक-प्रस्तार) which is developed now, is expected to be made use of, in information theory and telecommunications. The author having switched over from

pure sanskrit to Jyotish, then to science, finally completing Ph.D. in nuclear physics in U.S.A., settled in Punjabi University, Patiala. While, teaching M.sc. & M.phil classes, always prepared notes on further developments and started applying in scientific problems writing the relevant notes in Sanskrit. Brahmaleena His Holiness Ananta Shri Jagaduru Shankaracharya of Kanchi mutta (where the Author was conferred a title "Drk - Siddhanta Bhaskara") advised him (the author) for writing in English first and then rendering into Sanskrit, while the author was doing it otherwise. The piece-wise presentations of some of the contents were done in International conference on "γ-ray transition probabilities" in Delhi (1974) and a 32 page paper appeared in the proceedings of the conference organised by MATSCIENCE at Maysore (1978), also in International conference on nuclear Physics at Cocoyoc (Mexico). applications in nuclear Physics were demonstrated. Some results were communicated in lectures in University of Kasnsas at Lawrence (1989) and other research groups (like in PRL, IISC etc.) and other colleges, universities through specially arranged lectures. The Sanskrit compilation of some earlier developments, remained incomplete published due to printing problems. In 1993-94 Prof. T.V. Ramkrishnan and Prof. N. Kumar of department of Physics Indian Institute of science (I. I. Sc.) hosted the author as visitor Scientist in

C.T.S. (centre of theoretical studies in I.I.Sc.) for compliation and further advancements along those lines and finally prepare an advanced version in English.

This book is neither primarily intended to be a work on History of mathematics in Indian tradition nor an exposition of the kind of "vedic mathematics", which in fact cannot meet the requirements of applicability in scientific problems. However, this work does survey the historical developments in brief in the first chapter, But the main aim of this attempt is to advance further some branches of Indian mathematics to make them useful for students of science & engineering and also for researchers to get new results in their own fields. The book has Ist. chapter for survey of earlier developments from vedic antiquity to the 17th. century or so. The chapters II & III deal with the theory of numbers for finding integer solutions of indeterminate equations of Ist. & 2nd. degrees and their applications in Physics. Chapter IV deals with more advancements and applications in scientific problems, while the chapter V deals with the Prastāra (The old Indian Binary extension) with advancements to cope with the standards for handling the problems of information theory in telecommunication.

In every chapter, articles deal with earlier works and advancements further, illustrative examples deal with the solutions of problems for comparisions of the developed

methodoiogies with the parallel ones in use these days. Some articles or examples deal with applications by ancients in problems of their own interests, during those times and demonstrate the possible applications in modern scientific problems. The micsellenous problems at the ends of chapters constitute either the suitable exercises for students and the problems to be tackled using Indian mathematical techniques. Thus, in this book, four aspects have been taken into account, introducing Indian mathematics, Advancements, illustrative applications with examples and miscelleneous problems for students and researchers for further advancements.

It is worthwhile to point out some salient features of this work. In the 1st. chapter, besides survey of ancient's works, there are problems for students at the end which are just extensions of problems tackled earlier by ancients, but, the problems on the topics delt within chapters II to V are out of scope of simple Historical studies.

In the 2nd. chapter, vallī is defined in a unique way not found any where in earlier works. Some new symbols are defined and new terminologies like vallī Udvalana, Vallī Ākuñcana, Tail of Vallī, Kuṭṭana in more generalised sense etc, are used for the first time. In illustrations, the problems are solved to demonstrate the efficiency of vallī algorithm in comparision with the modern methodologies. At the same

time, these examplary problems, give sufficient excercises for students. Some of the applications concerning finding the time period of sun's apogee, evaluation of continued fractions & Vastu Sastra etc. are pointed out through some of the problems. It is remarked that linear programming problems too can be tackled using Kuṭṭaka theory. Bhaskaracharaya's 'fowl problem' paves the basis for such a technique. Also vallī is viewed as the most general form of Fibonacci series. The definition and treatment of Vallī by the author is a radically different approach than that of De Moiver's in the context of recursion sequences.

In 3rd. chapter, Indeterminate quadratic form equations (Varga-Prakṛti or V. P. equations) are tackled. Brahmgupta's lemma in most generalised from is stated and used. Convienent symbols are defined for use in these algorithms. Cakarvāla method and vallī method for V. P. equations are discussed in details. The minimum value condition in Cakarvāla algorithm is resolved with complete success for the first time. In vallī method for V. P. equation, sub orders within orders of continued fractions are defined for the first time and used in stating algorithms to get solutions for V. P. equation with additive # 1. It is shown that the solution of famous fermet-frenicle challenge problem (17th AD) using Cakarvāla method of Jayadeva (10th AD) is remarkably easy. This problem was solved by

Bhaskaracharya (1150 A.D.) in a few lines using cakravāla method. Here still better Vajrābhyāsa operator matrix is set up for solving problems effiiciently.

Bhāvita problem (To get integer solutions of $ax + by + cxy = d$) is tackled in details. Here all the possible integer solutions are discussed for the first time. Generalised multidimensional S'ulba theorem is given. Also an interesting problem of varying quadratic from factor is elaborated. Applications of all these methodologies are discussed in illustrations and problems. It may be remarked that here the approach in defining vallī deals with special kinds of continued fractions and is an entirely different treatment than that found in analytical theories of continued fractions in use these days.

In 4th. chapter vallī is viewed in most generalised form as a matrix. Pravallī of two or more arrays is defined for the first time to meet the necessities of more complicated problems. Various types of vallīs are discussed. Difference equations are viewed as vallī equations and their solutions, using vallī algorithm, are demonstrated. Vallī recurssion matrix is used to evaluate higher and higher eigen functions. In fact here the vallī matrix behaves as a step-up or step-down operator. Vallī-cum-vajrābhyāsa-composor operator is a radically new definition in general treatments for cyclic and ordinary continued fractions.

Theory of quantum constraints is discussed and its applications to the problems of finding states, for which nuclear moments vanish, are demonstrated. In these treatments, vallī-cum Vajrābhyāsa operator is used for getting expressions for Clebsch Gordon coefficients $C^{I\,L\,I}_{K\,O\,K}$ (L=1 to 4) and the relevant congruence equations are solved for all the states IK> to get all the higher and higher spin cum projection state, where the moments vanish. In the conclusion, the results are summarised up to spins of the order 200ħ Also a problem dealing with termination of rotational bands in odd-A & odd-odd nuclei is suggested to be tackled using these advanced techniques. The problems at the end of this chapter give enough exercises for stutents and interested researchers.

In 5th. chapter prastāra (Binary extension) is discussed for constant varṇas (letters) and constant mātrās (1 for short vowel and 2 for long vowel). All various traditional like possible algorithms are elaborated for the first time and the present day Binary expansion algorithm is shown to be one of them. It is to be pointed out that the mātrika prastāra where the mātrā-number is constant, will prove of much use for information theory in telecommunication, as the number of mātrās is connected with the weight of analogical Binary pattern. Checks (like that of Kryoff's test etc.) on properties of mātrika prastāra are suggested through miscelleneous

problems. The problems at the end of this chapter are designed to provide sufficient exercises on analogical extensions of traditional Binary systems to the cases of present day Binary patterns. The numbers of Mātrika prastāra patterns consist of terms of the Fibonacci series. The connection between the two is established using kuṭṭaka theory. The author hopes that in totality the book will introduce Indian mathematics and its advancements, to the students and the researchers and thus will pave basis for advanced uses of Indian mathematical methodolodies, which in many cases are shown to work faster than parallel methods being used at under-graduate, graduate and post graduate levels. It may be noted that these methodologies if computerised, will save much of the computer time in comparison with the present parallel computation techniques. It is hoped that this will create interest among students and researchers for further developments.

It may be remarked that this book differs from "भौतिकी –गणितम्" in Sanskrit in many respects. First two chapters in both discuss theories of indeterminate equations but the contents in this book are more elaborated advanced and extend upto fourth chapter. The prastāra algorithms in this English book are in 5th chapter in greater details. Especially the mātrika prastāra in this book is elaborated extensively. In the Sanskrit book prastāra details are limited to

the background Sanskrit scholars. The problems like the one of finding all the possible binary patterns for Āryā chandas etc. are of interest for Sanskrit scholars only. In English book the emphasis is to elaborate the subject contents for utility in information and tele-communication codes. The fourth chapter in Sanskrit book deals with relation between mathematics and epistemology & philosophy. It also discusses the trends in the modern mathematical philosophies in parallelism with Sāṅkhya jaina & vedānta philosophic traditions. These brief expositions will promote wider perspectives in the thought processes among scholars of Sanskrit. Mainly the Sanskrit version is designed for Sanskrit Scholars and the English book is designed for scholars in scientific disciplines.

The book is ready to be realeased soon

Shaktidhara Sharma

Dated : 10 Jan. 1999

Present Address:

1219, Phase IX, Mohali (Punjab)

Near Chandigarh, Ph.: 0172-221550

About the author :

Dr. S.D. Sharma studying Sanskrit since his initiation in traditional system of education, got shastri degree with philosophy and other courses, from Punjab university, Because of family tradition of pañcānga making, again started from beginning with Gaṇita-Jyotiṣa courses conducted by Queen's college in varanasi, got second shastri degree in siddhānta jyotisā and siddhanta jyotishacharya from the Queen's college turned university. Having decided to go to science discipline, again started from beginning (with matriculation) entered college got B.Sc. and then M.Sc.(Hononours school) from department of physics Punjab university Chandigarh. Served for two years as lecturer in Punjabi university Patiala. Got fellow ship from university of kansas at Lawrence (U.S.A.). Having completed Ph.D. in Nuclear physics under guidance of Dr. J.P. Davidson, having national feeling came back to India and again joined Punjabi University Patiala. Served for 27 years, retired as professor in 1998. In his teaching career he taught various theoretical physics subjects. Himself too he did M.A. (Sanskrit) with upaniṣads and vedānta as special subjects. He guided students for Ph.D. in Nuclear physics, Astronomy, Astrophysics, History of Astronomy, Philosophy & Ayurveda. Dr. Sharma has 45 years experience of panchanga computations and editing. H.H. Shankaracharya of kanchi mutta blessed him by conferring on him the title "Dṛk-Siddhānta Bhāskara" on account of his high standard scholarship in theoretical astronomy.

लेखक–विषये

डा॰ शक्तिधरः शर्मा आबाल्यात् गुरुकुलपरम्परया संस्कृतम् अधीयानः पञ्चाप–विश्वविद्यालयतः व्याकरण सांख्य–योग दर्शनादि विषयान् अवलम्ब्य शास्त्रिपरीक्षाम् उत्तीर्णवान्। ततः कुलपरम्परागत पञ्चांगकार्यार्थं गणित–सिद्धान्त–ज्यौतिषम् अध्येतुमनाः मूलतः (सम्पूर्णमध्यमातः) आरभ्य ज्यौतिष शास्त्र–विषय–विशिष्टम् द्वितीयं, “सिद्धान्त ज्योतिःशास्त्री” उपाधिं ततश्च “सिद्धान्तज्यौतिषाचार्य” स्नातकोत्तरम् उपाधिं प्राप्तवान्। “वैज्ञानिकः स्याम्” इति कृतं निश्चयः पुनः मूलतः (उच्चतर गणितं जानानः अपि मैट्रिकतः) आरभ्य कालेजं प्रविश्य B.Sc. तदनन्तरं पंजाब विश्वविद्यालयीय फिजिक्स विभागतः M.Sc. (Hons. School) स्नातोकत्तरं उपाधिम् अध्यगमत्। तदनन्तरं पटियालास्थ–विश्वविद्यालये वर्षद्वयं यावत् व्याख्यातृ–पदे अध्यापन कार्यं निर्वाह्य लारैंसस्थ–कैंसास–विश्वविद्यालयतः प्राप्त–छात्रवृतिः, तत्रत्य प्रोफैसर डा॰ जे॰ पी॰ डैविड्सन् (Dr.J.P. Davidson) निर्देशने Ph.D. उपाधिं प्राप्य भारतीयम्मन्यता–हेतोः स्वदेशं प्रतिनिवृत्तः। पुनः पंजाबी विश्वविद्यालये नियुक्तिं प्राप्य 27 वर्षाणि यावत् M.Sc., M. Phil छात्रान् विविधान् भौतिकी–शास्त्र–विषयान् अध्यापयत्। स्वयमपि च वेदान्तं विशेष–विषयम् अवलम्ब्य M.A. (Sanskrit) उपाधिम् अध्यगछत्। तथा च नाभिकभौतिकी–सिद्धान्तज्यौतिष–भौतिकीज्यौतिष –दर्शनायुर्वेदादिविषयान् अवलम्ब्य अनुसन्धित्सून् छात्रान् निरदेशयत्, तान् Ph.D. उपाधींश्च प्रापयत्। डा॰ शर्मणः पञ्चांग–गणित–सम्पादनादिकार्ये 45 वर्षावधिकः अनुभवः। अनन्तश्री कांची शंकराचार्य श्री चरणाः एनं “दृकसिद्धान्तभास्कर विरुदेन समाजितवन्तः”।